http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°1 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{5x^2-4x}$ 2 $f(x)=\dfrac{\left|-5x^2+2\right|}{2x^2-x-6}$ 3) $f(x)=\dfrac{5x^5-5x-1}{2x^4-3x^2-2}$

4) $f(x)=\sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$ 5) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x}$ 6) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{1-3x}}{2|x-1|-|x+5|}$

7) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$ 8) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x+\tan x+1}{\tan x-\sqrt{3}}$

Solution :1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{5x^2-4x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/5x^2-4x\neq 0\right\}$

$5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Signifie que : $x = 0$ ou $5x-4=0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x=\dfrac{4}{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{4}{5}\right\}$

2 $f(x)=\dfrac{\left|-5x^2+2\right|}{2x^2-x-6}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-6\neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times 2\times(-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : **PROF : ATMANI NAJIB**

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};2\right\}$

3) $f(x)=\dfrac{5x^5-5x-1}{2x^4-3x^2-2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^4-3x^2-2\neq 0\right\}$

$2x^4-3x^2-2=0$ Equivalent à : $2\left(x^2\right)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation :

$2X^2-3X-2=0$

a = 2, b = -3 et c = - 2 et $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times 2\times(-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

PROF: ATMANI NAJIB

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$

Qui est équivalent à : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ et par suite : $x^2=-\frac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

4) $f(x)=\sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/(x+2)(3x-1)(2x+5)\geq 0\right\}$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que :

$x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f=\left[-\frac{5}{2},-2\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

PROF : ATMANI NAJIB

5) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\geq 0\ \ et\ \ 2x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\geq 0\ \ et\ \ x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/(x-2)(x+2)\geq 0\ \ et\ \ x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x-2\geq 0\ \ et\ \ x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\ \ et\ \ x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\right\}=[2.+\infty[$

6) $f(x)=\frac{x-\sqrt{1-3x}}{2|x-1|-|x+5|}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2|x-1|-|x+5|\neq 0\ \ et\ 1-3x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2|x-1|-|x+5|\neq 0\ \ et\ -3x\geq -1\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2|x-1|-|x+5|\neq 0\ \ et\ x\leq\frac{1}{2}\right\}$

$2|x-1|=|x+5|$ Signifie que : $|2x-2|=|x+5|$

PROF:ATMANI NAJIB

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Signifie que : $2x-2=x+5$ ou $2x-2=-(x+5)$

Signifie que : $x=7$ ou $2x-2=-x-5$

Signifie que : $x=7$ ou $3x=-3$

Signifie que : $x=7$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x\neq -1 \;\; et \;\; x\neq 7 \;\; et \;\; x\leq \frac{1}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;\frac{1}{2}\right]$

7) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$ $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / \sin(2x)-\cos(3x)\neq 0\right\}$

On a : $\sin(2x)-\cos(3x)=0$

Équivaut à : $\sin(2x)=\cos(3x)$

C'est-à-dire : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

C'est-à-dire : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left(\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$

PROF : ATMANI NAJIB

8) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x+\tan x+1}{\tan x-\sqrt{3}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \;\; et \;\; \tan x\neq\sqrt{3} \;\; et \;\; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \;\; et \;\; \tan x\neq\tan\frac{\pi}{3} \;\; et \;\; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \;\; et \;\; x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi \;\; et \;\; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice2 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2} & si \quad x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{3}{x^2-1} & si \quad x>0 \end{cases}$

Déterminer D_f

Solution : *Remarque :* $\begin{cases} f(x)=f_1(x) & si \quad x\in I_1 \\ f(x)=f_2(x) & si \quad x\in I_2 \end{cases}$ Alors : $D_f=\left(D_{f_1}\cap I_1\right)\cup\left(D_{f_2}\cap I_2\right)$

On pose : $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ et $I_1=\left]-\infty;0\right]$ et $f_2(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$ et $I_2=\left]0;+\infty\right[$

$D_{f_1}=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;+\infty\right[$ et $D_{f_2}=\left]-\infty;-1\right]\cup\left]-1;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

$D_{f_1} \cap I_1 =]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ et $D_{f_2} \cap I_2 =]0;1[\cup]1;+\infty]$

Donc : $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;0] \cup]0;1[\cup]1;+\infty]$

Donc : $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$

Exercice 3 : Soit f la fonction numérique tel que : $f(2x-3) = \begin{cases} x-3 & si \quad x \geq \frac{3}{2} \\ 3x-4 & si \quad x < \frac{3}{2} \end{cases}$

1) Déterminer $f(x)$ en fonction de x

2) Calculer : $f(5)$

Solutions :1) On a : $x = 2\left(\frac{x+3}{2}\right) - 3$ donc : $f(x) = f\left(2\left(\frac{x+3}{2}\right) - 3\right)$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2} - 3 & si \quad \frac{x+3}{2} \geq \frac{3}{2} \\ 3\frac{x+3}{2} - 4 & si \quad \frac{x+3}{2} < \frac{3}{2} \end{cases}$ C'est-à-dire : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2} & si \quad x \geq 0 \\ \frac{3x+1}{2} & si \quad x < 0 \end{cases}$

2) Calcul de : $f(5)$: $f(5) = \frac{5-3}{2} = 1$

Exercice 4 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tel que :
$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$; $b^2 f(a) = a^2 f(b)$

Si on sait que : $f(2) \neq 0$ calculer : $\frac{f(5) - f(1)}{f(2)}$

Solution : On a : $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$; $b^2 f(a) = a^2 f(b)$

PROF : ATMANI NAJIB

Donc : $\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f(5) = 25 f(1)$

Donc : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 4 f(1) = f(2)$

Donc on a : $\frac{f(5) - f(1)}{f(2)} = \frac{25 f(1) - f(1)}{4 f(1)} = \frac{24 f(1)}{4 f(1)} = 6$

Exercice 5 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. 2) $f(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{x}$ 3) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$ 4) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

5) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}$. 6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$. 7) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ 8) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

9) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ 10) $h(x) = \frac{\tan^4 x}{1 + \sin^2 x}$

Solution 1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$: On a $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $x \neq 0$ par suite : $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+2x+\dfrac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+2(-x)+\dfrac{1}{-x}=x^2-2x-\dfrac{1}{x}$

$f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ Signifie $x^2=1$ Équivaut à : $x=1$ ou $x=-1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\dfrac{|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

PROF : ATMANI NAJIB

$1-x^2=0$ Signifie $x^2=1$ Équivaut à : $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$ alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ Signifie : $x^2=-5$ pas de solutions Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

$f(-x)=-f(x)$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\right\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ par suite $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$ Donc f est une fonction paire
 $f(-x)=f(x)$

7) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\right\}$ Donc $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ donc f est une fonction ni paire ni impaire

8) $f(x)=\frac{x}{x-2}$:On a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ signifie que : $x\neq 2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On a $-2\in D_f$ mais $-(-2)=2\notin D_f$

Donc D_f n'est pas symétrique par rapport a O

Donc f est une fonction ni paire ni impaire

9) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

$f(-1)=(-1)^2+\frac{1}{-1}=1-1=0$ et $f(1)=1^2+\frac{1}{1}=1+1=2$

On a : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : $\exists x=1\in\mathbb{R}\ /\ f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : f est une fonction ni paire ni impaire,

10) $f(x)=\frac{5\tan^4 x}{1+\cos^4 x}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ et\ 1+\cos^4 x\neq 0/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Et puisque : $1+\cos^4 x\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞ $f(-x)=\frac{5\tan^4(-x)}{1+\cos^4(-x)}=\frac{5(-\tan x)^4}{1+\cos x^4}=\frac{5\tan^4 x}{1+\cos^4 x}=f(x)$ Car $\tan(-x)=-\tan x$ et $\cos(-x)=\cos x$

Donc f est une fonction paire.

Exercice 6 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$: $\forall x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Montrer que : f est une fonction impaire

2) Donner une : expression de $f(x)$: pour tout réel x

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$

On a $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1) Pour tout réel x

En remplaçant x par –x on trouve : $5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1) + (2) donne : $6\left(f(-x)+f(x)\right)=0$ donc : $f(-x)+f(x)=0$

Donc : $f(-x)=-f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : f est une fonction impaire

2) On a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc : $5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}}$

Exercice 7 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$

(C_f) La courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice 8 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=2x-3 \quad si\ x\in\left]-\infty;-2\right[\\ f(x)=x^3-2x \quad si\, x\in[-2,2] \\ f(x)=2x+3 \quad si\, x\in\left]2;+\infty\right[\end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1) Un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

2) ☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☞→Si : $x\in\left]-\infty;-2\right[$ alors : $-x\in\left]2;+\infty\right[$

On a : $f(x)=2x-3$ et $f(-x)=2(-x)+3=-2x+3$ donc : $-f(x)=-2x+3$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

☞→Si : $x\in[-2,2]$ alors : $-x\in[-2,2]$

On a : $f(x)=x^3-2x$ et $f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x$ donc : $-f(x)=-x^3+2x$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

☞→Si : $x\in\left]2;+\infty\right[$ alors : $-x\in\left]-\infty;-2\right[$

On a : $f(x)=2x+3$ et $f(-x)=-2x-3$ donc : $-f(x)=2x+3$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(-x)=-f(x)$ par suite : f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_f) il suffit de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

Exercice 9 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

Tel que : $f(x)=2x-x^2 \quad \forall x\in[0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

3) Donner l'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=\left[2k;2(k+1)\right[$ $k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;2[$:

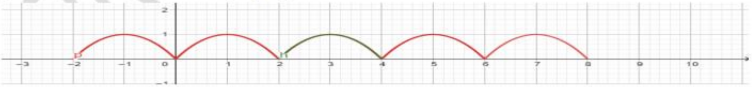
On a : f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=2$ et $c=0$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=1$ et $\left(f(1)=2-1=1\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une portion parabole de sommet $A(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2[$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) $f(4.1)=f(2+2.1)=f(2.1)=f(2+0.1)=f(0.1)$ $f(4.1)=2(0.1)-(0.1)^2=0.19$

$f(-3.5)=f(-4+0.5)=f(0.5)$

PROF: ATMANI NAJIB

$f(-3.5)=2(0.5)-(0.5)^2=0.75$

$f(265.11)=f(2\times 132+1.11)=f(1.11)$

$f(1.11)=2(1.11)-(1.11)^2\approx 0.98$

3) l'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[2k;2(k+1)[\Leftrightarrow 2k\leq x\prec 2(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\leq x-2k\prec 2\Leftrightarrow f(x-2k)=f(x)$

$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=2(x-2k)-(x-2k)^2$ Avec $k\leq\frac{x}{2}\prec k+1$ cad $k=E\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 10 : Les fonction f et g définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f, on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+3}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Donc : ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$

Ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$ on a : f (x) = g(x)

Exercice 11 : On considère l'ensemble : $A=\left\{k\pi\ ;\ 2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Soient les deux fonctions définies de A vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\sin 2x$

Montrer que : $f=g$

Solution : On a : $D_f=D_g=A$

Soit $k\in\mathbb{Z}$: $f(k\pi)=\sin(k\pi)=0$

$f\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$g(k\pi)=\sin(2k\pi)=\sin(0)=0$

PROF: ATMANI NAJIB

$$g\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(4k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g\left(2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(4k\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc : $\forall x\in A : f(x)=g(x)$

Par suite : $f=g$

Exercice 12 : Soit f et g les fonctions numériques tel que : $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=D_g=\mathbb{R}$: $g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ par suite : $f\prec g$

Exercice 13 : Soit f et g les fonctions numériques tel que :

$f(x)=x^2-3x+5$ et $g(x)=-x^2+2x+2$

Comparer les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$

Solution : Pour comparer les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ il suffit d'étudier le signe de la différence : $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$

On a : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x^2-3x+5-(-x^2+2x+2)=x^2-5x+3$; $\Delta=1>0$:

$x_1=\frac{5-1}{2\times2}=1$ et $x_2=\frac{5+1}{2\times2}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-5x+3$		+	0	-	0	+	
$f(x)-g(x)$		+	0	-	0	+	

Donc : $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $f(x)\leq g(x)\Leftrightarrow x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$

Conclusion : $f\leq g\ sur\left[1;\frac{3}{2}\right]$ et $f>g\ sur\ \left]-\infty;1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice 14 : Soient les deux fonctions : $f(x)=\frac{1+2x}{1+x}$ et $g(x)=\frac{1-x}{1-2x}$

1) Comparer les fonctions f et g

2) En déduire une comparaison des nombres : $a=\frac{0,9999}{0,9998}$ et $b=\frac{1,0002}{1,0001}$

Solution : 1) Comparons les fonctions f et g

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$:

PROF: ATMANI NAJIB

$f(x)-g(x)=\frac{1+2x}{1+x}-\frac{1-x}{1-2x}=\frac{(1+2x)(1-2x)-(1+x)(1-x)}{(1+x)(1-2x)}=\frac{1-4x^2-1-x^2}{(1+x)(1-2x)}=\frac{3x^2}{(1+x)(2x-1)}$

Le signe de : $f(x)-g(x)$ est celui de : $(1+x)(2x-1)$

$f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow(1+x)(2x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$f(x)\leq g(x)\Leftrightarrow x\in\left]-1;\frac{1}{2}\right[$

Conclusion : $f\geq g$ sur : $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f\leq g$ sur : $\left]-1;\frac{1}{2}\right[$

2) Déduisons une comparaison des nombres : $a=\frac{0,9999}{0,9998}$ et $b=\frac{1,0002}{1,0001}$

On a : $a=\frac{0,9999}{0,9998}$ et $b=\frac{1,0002}{1,0001}$

Donc : $a=g(0,0001)$ et $b=f(0,0001)$ et puisque : $0,0001\in\left]-1;\frac{1}{2}\right[$

Alors : $f(0,0001)\leq g(0,0001)$

Alors : $b\leq a$

Exercice 15 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) Calculer : $f(0)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; $f(-3)$ et $f(3)$

5) Dresser son tableau de variation sur D_f

6) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Solution : 1) Un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) ☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☞ $f(-x)=-\frac{1}{2}(|-2x+3|+|-2x-3|)=-\frac{1}{2}(|-(2x-3)|+|-(2x+3)|)$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(|2x-3|+|2x+3|)$ Car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Donc : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ c'est-à-dire : le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

PROF: ATMANI NAJIB

3) $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

Si $x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ alors : $0\le x\le\frac{3}{2}$

Donc : $0\le 2x\le 3$ c'est-à-dire : $2x-3\le 0$ et on a : $2x+3\ge 0$

Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}\left(2x+3+\left(-(2x-3)\right)\right)=-\frac{1}{2}(2x+3-2x+3)=-3$

Si $x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ alors : $x\ge\frac{3}{2}$

Donc : $2x\ge 3$ c'est-à-dire : $2x-3\ge 0$

Et on a : $2x+3\ge 0$ Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)=-\frac{1}{2}(2x+3+|2x-3|)=-\frac{1}{2}(4x)=-2x$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x)=-3 \text{ si } x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right] \\ f(x)=-2x \text{ si } x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\end{cases}$

4) $f(0)=-\frac{1}{2}(|2\times 0+3|+|2\times 0-3|)=-\frac{1}{2}(3+3)=-3$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\left|2\times\frac{3}{2}+3\right|+\left|2\times\frac{3}{2}-3\right|\right)=-\frac{1}{2}(6+0)=-3$

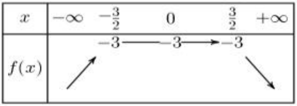
$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-3$ et $f(-3)=f(3)=-6$ car :f est une fonction paire

5) Le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

On a : f est constante sur l'intervalle :

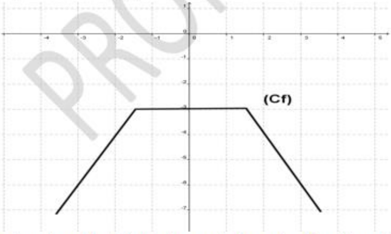
$I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et décroissante dans $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Et puisque f est une fonction paire alors f est constante sur l'intervalle : $I'=\left[-\frac{3}{2};0\right]$ et f est croissante dans $J'=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ d'où le tableau de variation suivant :



6) La courbe (C_f) :

ATMANI NAJIB



Exercice 16 : Etudier les variations des fonctions définies par :

1) $f(x)=x^2$ 2) $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 3) $h(x)=2025x^2+5$ 4) $k(x)=\frac{-5}{x}$

Réponses :1) $f(x)=x^2$ et $D_f=\mathbb{R}$

On sait que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

x	$-\infty \quad 0 \quad +\infty$
$f(x)$	↘ 0 ↗

2) $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc : $g=-\frac{1}{2}f$

On puisque que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$ et que : $-\frac{1}{2}<0$

Alors : $g=-\frac{1}{2}f$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$

x	$-\infty \quad 0 \quad +\infty$
$g(x)$	↗ 0 ↘

$g(0)=-\frac{1}{2}0^2=0$

3) $h(x)=2025x^2+5$ et $D_h=\mathbb{R}$ donc : $h=2025f+5$

On puisque que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$ et que : $2025>0$

Alors : $f=2025f+5$ est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

x	$-\infty \quad 0 \quad +\infty$
$h(x)$	↘ 5 ↗

$h(0)=2025\times0^2+5=5$

4) $k(x)=\frac{-5}{x}$ et $D_k=\mathbb{R}^*$

PROF: ATMANI NAJIB

On sait que : $v : x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $k = -5v$

Alors : k est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-5 < 0$

Exercice 17 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*$ tel que :
$\forall(a;b) \in \mathbb{R}^2$; $f(a-b) = f(a\times)f(b)$

Montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$

Solution : On a : $\forall(a;b) \in \mathbb{R}^2$;

Soit : $a \in \mathbb{R}$ on pose : $b = \frac{a}{2}$

Donc : $f\left(a - \frac{a}{2}\right) = f(a\times)f\left(\frac{a}{2}\right)$

Donc : $f\left(\frac{a}{2}\right) = f(a) \times f\left(\frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{2}\right) - f(a) \times f\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{2}\right)(1 - f(a)) = 0$

Donc : $f\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \; ou \; 1 - f(a) = 0$ et puisque : $f(x) \neq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ alors : $f\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0$

Par suite : $1 - f(a) = 0$

Par suite : $f(a) = 1$; $\forall a \in \mathbb{R}$

Donc : la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$

Exercice 18 : Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{4 - x^2}}$

1) Etudier la parité de f

2) Soient : $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$: Calculer : $(f(x_1))^2 - (f(x_2))^2$

3) En déduire les variations de f sur D_f

4) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4 - x^2 > 0\}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f =]-2;2[$

- Pour tout réel x si : $x \in]-2;2[$, alors $-x \in]-2;2[$

- $f(-x) = \frac{|-x|}{\sqrt{4 - (-x)^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{4 - x^2}} = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soient : $x_1 \in]-2;2[$ et $x_2 \in]-2;2[$ tel que : $x_1 \neq x_2$: Calculons : $(f(x_1))^2 - (f(x_2))^2$

ATMANI NAJIB

$$(f(x_1))^2-(f(x_2))^2=\frac{x_1^2}{4-x_1^2}-\frac{x_2^2}{4-x_2^2}=\frac{4(x_1^2-x_2^2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}=\frac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}$$

3) Déduisons les variations de f sur D_f

Etudions les variations de f sur $[0;2[$

Soient : $x_1\in[0;2[$ et $x_2\in[0;2[$

On a : $(f(x_1))^2-(f(x_2))^2=\frac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}$

Donc : $(f(x_1)-f(x_2))(f(x_1)+f(x_2))=\frac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}$

Donc : $\frac{(f(x_1)-f(x_2))}{x_1-x_2}(f(x_1)+f(x_2))=\frac{4(x_1+x_2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}$

Comme $x_1\in[0;2[$ et $x_2\in[0;2[$ et $x_1\neq x_2$ et $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}\geq 0$

Alors : $4-x_1^2>0$ et $4-x_2^2>0$ et $f(x_1)+f(x_2)\geq 0$

Par suite : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

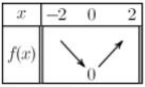
D'où : f est strictement croissante sur $[0;2[$

3) f est paire et le symétrique de $I=[0;2[$ est l'intervalle $I'=]-2;0]$

Puisque : f est strictement croissante sur $I=[0;2[$

Alors f est strictement décroissante sur $I'=]-2;0]$

4) Par suite le tableau de variations de f sur D_f est :



Exercice 19 : Soit f une fonction numérique tel que :

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$$

1) Déterminer D_f

2) a) Démontrer que : $f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

b) Est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) Est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x)-3=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-3=\frac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$

Donc $f(x)-3=\frac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$ par suite $f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(0)=3$ donc $f(x)\leq f(0)$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc : 3 est une valeur maximale de f

2) a) soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x)-2=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\frac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$

Donc : $f(x)-2=\frac{1}{x^2+1}\succ 0$ par suite : $0\prec f(x)$ si $x\in\mathbb{R}$

b) on remarque que : $f(x)\succ 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

Conclusion : $2\prec f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

Puisque : $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x\in\left]1;+\infty\right[$ alors $\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exercice 20 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $(4x+3)^2\leq 25(x^2+1)$

2) En déduire que f est bornée

Solution :1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $(4x+3)^2\leq 25(x^2+1)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $(4x+3)^2-25(x^2+1)=16x^2+24x+9-25x^2-25=-9x^2+24x-16=-(9x^2-24x+16)$

Donc : $(4x+3)^2-25(x^2+1)=-(3x-4)^2\leq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $(4x+3)^2\leq 25(x^2+1)$

2) Déduisons que f est bornée

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $(4x+3)^2\leq 25(x^2+1)$ donc : $\sqrt{(4x+3)^2}\leq\sqrt{25(x^2+1)}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|4x+3|\leq 5|x^2+1|$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $\frac{|4x+3|}{\left|\sqrt{x^2+1}\right|}\leq 5$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left|\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}\right|\leq 5$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $|f(x)|\leq 5$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-5\leq f(x)\leq 5$

Conclusion : f est bornée

Exercice 21 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

2) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4$

$f(x) = \left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 4$ Donc : $f(x) + 4 = \left(x + \sqrt{x}\right)^2 \geq 0$

Donc : $f(x) + 4 \geq 0$ par suite : $f(x) \geq -4$ et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

Donc : $f(0) = -4$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 4 \leq M \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x + \sqrt{x}\right)^2 \leq M + 4$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} \leq \sqrt{M+4}$ (On peut toujours supposer $M \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} \leq \sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x \leq \left(\sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$ Absurde

Donc : f est non majorée

Exercice 22 : une personne a acheté un terrain rectangulaire de périmètre 40 m a un prix Égal à 200000dh

Déterminer les dimensions de ce terrain pour le prix du mètre carré soit minimale

Solution : Soit x ; y les dimensions de ce terrain rectangulaire

Soit S son aire et P son périmètre

$P = 40 = 2(x + y) \Rightarrow x + y = 20$

$S = x \times y = x \times (20 - x) = -x^2 + 20x$

Soit : P_u le prix d'un mètre carré ; P_T le prix Total de ce terrain

Donc : $P_T = P_u \times S$ avec : $P_T \succ 0$ et $S \succ 0$

Donc : $P_u = \frac{P_T}{S}$ avec : $P_T \succ 0$ et $S \succ 0$

Donc : le prix du mètre carré est minimal si et seulement si : S est maximale

Etudions les variations de $S(x) = -x^2 + 20x$

PROF: ATMANI NAJIB

On a S est une fonction polynôme

On a $a=-1$ et $b=20$ et $c=0$ $\left(f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-20}{2\times(-1)}=10$ et $\left(f(10)=100\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(10;100)$ et d'axe de symétrie la droite $x=10$

Donc le tableau de variations de S

x	$-\infty$	10	$+\infty$
$S(x)$	↗	100	↘

S est maximale pour : $x=10$ et comme : $x+y=20$ alors : $y=10$

Le prix du mètre carré est minimal pour : $x=10$ et $y=10$

Exercice 23 : Soit f une fonction numérique tel que : $f\left(x\right)=2x^{2}-4x+3$

1) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g\left(x\right)=x^{2}-\left|x(x-2)\right|-2x+3$

a) Déterminer D_g et écrire $g\left(x\right)$ sans le symbole de la valeur absolue

3)Tracer la courbe représentative de (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^{2}-\left|x(x-2)\right|-2x+1=0$

Solution : 1) On a : $f\left(x\right)=2x^{2}-4x+3$: f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$\left(f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c\right)$ On a : $a=-3$; $b=4$ et $c=1$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times(2)}=1$ et $f(1)=f(1)=2\times(1)^{2}-4\times1+3=2-4+3=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W\left(\alpha;f\left(\alpha\right)\right)$ c'est à dire : $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

Comme : $\boxed{a=2>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$

Tableau de variations de f : On a $a=2>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g\left(x\right)=x^{2}-\left|x(x-2)\right|-2x+3$

On a : $D_g=\mathbb{R}$

Etudions le signe de : $x(x-2)$

$x(x-2)=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

① Si $x\in[0;2]$: $g(x)=x^2-(-x(x-2))-2x+3$

Donc : $g(x)=x^2+x(x-2)-2x+3=x^2+x^2-2x-2x+3$

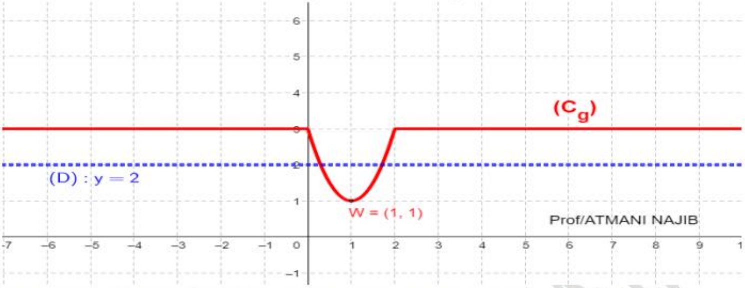
Donc : $g(x)=2x^2-4x+3$

② Si $x\geq 2$ ou $x\leq 0$: $g(x)=x^2-(x(x-2))-2x+3$

Donc : $g(x)=x^2-x(x-2)-2x+3=x^2-x^2+2x-2x+3$

Donc : $g(x)=3$ (constante)

3) Représentation graphique de la courbe représentative de (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



4) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$

$x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$ Signifie $x^2-|x(x-2)|-2x+1+2=2$

Signifie : $x^2-|x(x-2)|-2x+3=2$

Signifie : $g(x)=2$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $(D): y=2$

Puisque : la droite $(D): y=2$ coupe (C_g) en deux points alors :

L'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$ admet exactement 2 solutions

Exercice 24 : On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\frac{x}{x-2}$ et (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

4)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

5)Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

7)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$

8)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h

b) Montrer que la fonction h est paire

PROF: ATMANI NAJIB

---

c)Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

9)Tracer la courbes (C_h) de h et (C_g) dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

10)Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Solution : 1) : On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=0$ $f(x)=x^2-2x$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times1}=1$ et $f(1)=1^2-2\times1=-1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)=W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

On a $a=1>0$: La fonction f est donc croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$

Le tableau de variations de f : $a=1>0$

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

2) (En utilisant un résumé de notre cours) : Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{1x+0}{x-2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{-2}{1}=2$ et $y=\frac{1}{1}=1$

$\det g=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 0=-2<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ *et* $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

3)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

---

$f(x)=x^2-2x$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x=0$

Signifie $x(x-2)=0$

Signifie $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie $x=0$ ou $x=2$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $O(0;0)$ et $A(2;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(2,0);O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

PROF: ATMANI NAJIB

Et on a $f(0)=0^2-2\times 0=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

4)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère : $g(x)=\frac{x}{x-2}$

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie $\frac{x}{x-2}=0$ Signifie $x=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $O(0;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=\frac{0}{0-2}=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

$(C_g)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

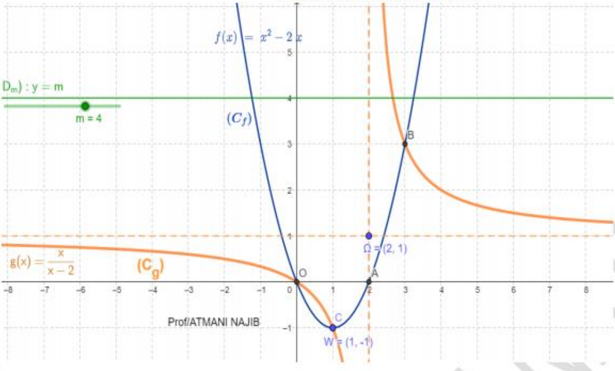
5)Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

La courbe (C_g) :

-2	-1	0	2	3	4	4
5/3	2	3	▨	3	2	5/3

La courbe (C_f) : $f(x)=x^2-2x$

x	2	3	4
$f(x)$	0	3	8



PROF:ATMANI NAJIB

6) Déterminons algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x=\dfrac{x}{x-2}$

Signifie que : $x(x-2)-\dfrac{x}{x-2}=0$

Signifie que : $x\left(x-2-\dfrac{1}{x-2}\right)=0$ signifie que : $x\left(\dfrac{(x-2)^2-1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\dfrac{(x-2)^2-1^2}{x-2}\right)=0$ signifie que : $x\left(\dfrac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $\dfrac{x(x-3)(x-1)}{x-2}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x(x-3)(x-1)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$ ou $x-3=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=1$ ou $x=3$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{C(1,-1);O(0,0);B(3,3)\}$

7)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessous de (C_g)

Donc : graphiquement : $S=[0,1]\cup]2,3]$

PROF. ATMANI NAJIB

---

8)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\}$

$|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$
- $h(-x)=\dfrac{|-x|}{|-x|-2}=\dfrac{|x|}{|x|-2}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

Donc h est une fonction paire,

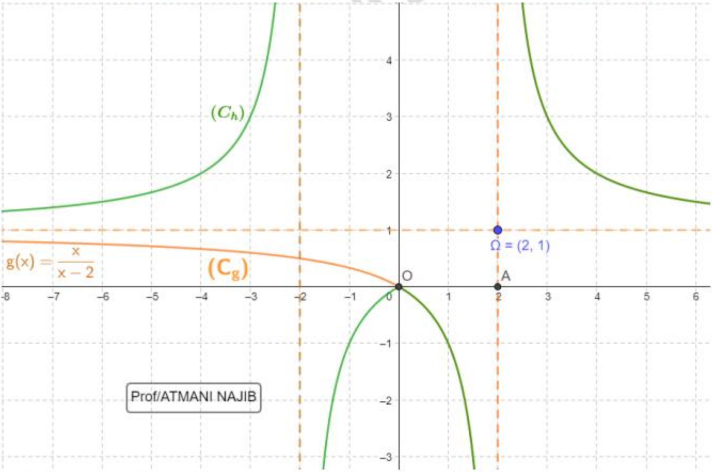
NAJIB

c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+}-\{2\}$

Soit : $\mathbb{R}^{+}-\{2\}$ on a : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}=g(x)$ car $|x|=x$

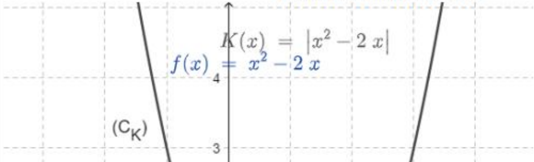
Donc : $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+}-\{2\}$

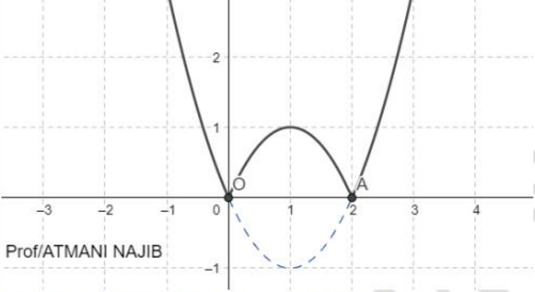
9) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



10) Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

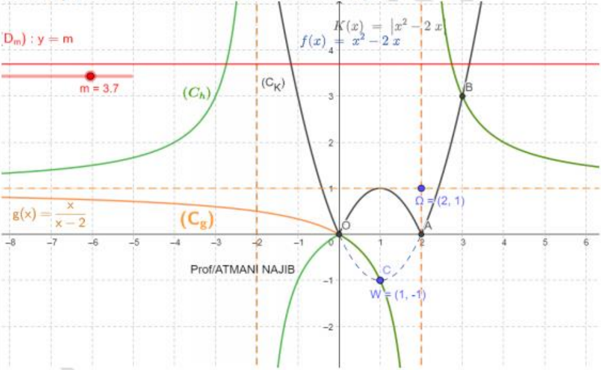
a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$





NAJIB

Remarque : tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$: est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m)\quad y=m$

⊳ Si $m<1$: l'équation n'a pas de solutions

⊳ Si $m=0$: l'équation admet deux solutions

▹ Si $0<m<1$: l'équation admet 4 solutions

▹ Si $m=1$: l'équation admet 3 solutions

▹ Si $m>1$: l'équation admet deux solutions

Exercice 25 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ el que :

$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

1)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\neq -1$ et $f(x)(f(x)+1)\neq 0$

2)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ et $f(x+2)=\frac{-1}{f(x)}$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x+4)=f(x)$

4)Déduire que f est périodique

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\neq -1$ et $f(x)(f(x)+1)\neq 0$

On va raisonner par l'absurde :

On suppose que : $\exists x\in\mathbb{R}$: $f(x)=-1$ ou $f(x)(f(x)+1)=0$

Si : $f(x)=-1$ essayons de trouver une contradiction

$f(x)=-1$; Comme on a : $f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x)$

$\Rightarrow f(x+1)\times(-1)+f(x+1)+1=-1\Rightarrow -f(x+1)+f(x+1)+1=-1$

$\Rightarrow +1=-1$ Contradiction

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\neq -1$

Si : $f(x)(f(x)+1)=0$ essayons de trouver une contradiction

$f(x)(f(x)+1)=0\Rightarrow f(x)=0$ ou $f(x)=-1$ (déjà montrer impossible)

$f(x)=0$; Comme on a : $f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=0$

$\Rightarrow f(x+1)\times 0+f(x+1)+1=0\Rightarrow f(x+1)=-1$ Impossible car $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\neq -1$

Donc : aussi pour : $f(x+1)\neq -1$ donc : Contradiction

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)(f(x)+1)\neq 0$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\neq -1$ et $f(x)(f(x)+1)\neq 0$

2) → Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$

Comme on a : $f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x)$

Donc : $f(x+1)(f(x)+1)=f(x)-1$ et comme : $f(x)+1\neq 0$ car $f(x)\neq -1$

Donc : $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

→ Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=\frac{-1}{f(x)}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=f\left((x+1)+1\right)=\dfrac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1}$ et on a : $f(x+1)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$

Donc : $f(x+2)=\dfrac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1}=\dfrac{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=\dfrac{\dfrac{-2}{f(x)+1}}{\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}}=\dfrac{-2}{2f(x)}=\dfrac{-1}{f(x)}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=\dfrac{-1}{f(x)}$

3) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x+4)=f(x)$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+4)=f\left((x+2)+2\right)$ comme on a : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=\dfrac{-1}{f(x)}$

Alors : $f(x+4)=f\left((x+2)+2\right)=\dfrac{-1}{f(x+2)}=\dfrac{-1}{\dfrac{-1}{f(x)}}=f(x)$

4)Déduisons que f est périodique :Puisque → $\forall x\in\mathbb{R}$: $x+4\in\mathbb{R}$ et → $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+4)=f(x)$

Alors : f est périodique et 4 est une période de f

Exercice 26 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x+3$

1) Déterminer $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ On pose : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^nx+3\left(2^n-1\right)$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$

1) Déterminons $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=2f(x)+3=2(2x+3)+3=2^2x+6+3=4x+9$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ On pose : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^nx+3\left(2^n-1\right)$

On pose : $P(n)$: $f^{(n)}(x)=2^nx+3\left(2^n-1\right)$

1étapes : l'initialisation :
Pour n=2 nous avons :d'une part : $f^{(2)}(x)=4x+9$ et $2^nx+3\left(2^n-1\right)=2^2x+3\left(2^2-1\right)=4x+9$

Donc $f^{(n)}(x)=2^nx+3\left(2^n-1\right)$ pour : n=2

Donc : $P(2)$: est vraie.

2étapes : d'hérédité :Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ Supposons que $P(n)$ soit vraie

C'est-à-dire : $f^{(n)}(x)=2^nx+3\left(2^n-1\right)$

3étapes : Nous allons montrer que $P(n+1)$: est vraie.

PROF: ATMANI NAJIB

Montrons alors que : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}x+3\left(2^{n+1}-1\right)$??

On a : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Donc : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)=f\left(f^{(n)}(x)\right)=2f^{(n)}(x)+3$ et comme : $f^{(n)}(x)=2^{n}x+3\left(2^{n}-1\right)$

Alors : $f^{(n+1)}(x)=2\left(2^{n}x+3\left(2^{n}-1\right)\right)+3=2\times2^{n}x+6\left(2^{n}-1\right)+3=2^{n+1}x+3\left(2\times2^{n}-2+1\right)=2^{n+1}x+3\left(2\times2^{n+1}-1\right)$

Donc $P(n+1)$: est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^{n}x+3\left(2^{n}-1\right)$

Exercice 27 : Soit f une fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^{3}+1}$

En utilisant les propriétés de la monotonie des fonctions composées

Etudier les variations de f sur $[-1;+\infty[$

Solutions : On peut décomposer la fonction f et l'écrire sous la forme : $f=v\circ u$

$u(x)=x^{3}$ et $v(x)=\sqrt{x+1}$ car :

$f(x)=\sqrt{u(x)+1}=v(u(x))=(v\circ u)(x)$

Tableau de variation de u :

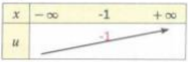
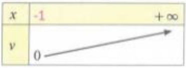


Tableau de variation de v :



→On a : $u([-1;+\infty[)\subset[-1;+\infty[$

En effet : si on a $x\in[-1;+\infty[\Rightarrow x\geq-1\Rightarrow x^{3}\geq-1\Rightarrow x^{3}+1\geq0\Rightarrow u(x)\geq0\Rightarrow u(x)\in[-1;+\infty[$

Puisque u est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ et $u([-1;+\infty[)\subset[-1;+\infty[$ et v est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ alors : $f=v\circ u$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Exercice 28 : Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x-3}$ et $g(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)a) Déterminer D_f et D_g

b) Déterminer les tableaux de variations de f et g

c) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\prec g(x)$

3) Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation $g(x)=-x$

4) Résoudre algébriquement l'équation $g(x)=-x$

5) Etudier la monotonie de $f+g$ sur : $[3;+\infty[$

6) On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_h$ a) Déterminer D_h b) Ecrire $h(x)$ en fonction de x

c) Étudier la monotonie de h dans l'intervalle : $[3;+\infty[$

PROF. ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Solution :1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 3\}=[3,+\infty[$

On a $g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$ Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

b) Déterminer les tableaux de variations de f et g : $f(x)=\sqrt{x-3}$ et $g(x)=\frac{x-3}{x+1}$

Pour : $f(x)=\sqrt{x-3}$

x	-3	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

f Est strictement croissante sur $[3;+\infty[$

Pour : $g(x)=\frac{x-3}{x+1}$ En générale si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $g(x)=\frac{x-3}{x+1}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $W(-1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-1$ et $y=1$

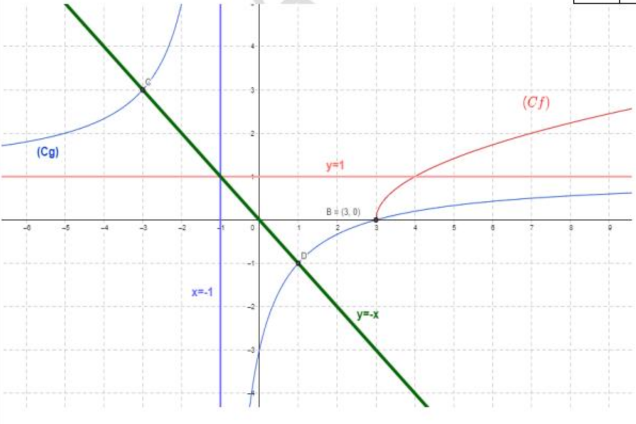
et on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+3=4\succ 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

c) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

$f(x)=\sqrt{x-3}$: tableau des valeurs

x	3	4	7
$f(x)$	0	1	2



ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

2) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \prec g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est toujours au -dessus sur $[3;+\infty[$

Donc : $S=\varnothing$

3) Détermination graphique du nombre des solutions de l'équation $g(x)=-x$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_g) et la droite (D) d'équation : $y=-x$: il y'a deux points d'intersections

Donc : nombre des solutions de l'équation $g(x)=-x$ est 2

4) Résolution algébrique de l'équation $g(x)=-x$

$$g(x)=-x \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}=-x \Leftrightarrow -x^2-x=x-3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16>0$$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc : $S=\{-1;3\}$

5) Etudie de la monotonie de $f+g$ sur : $[3;+\infty[$

$f+g$ est la somme de deux fonction croissante sur : $[3;+\infty[$

Donc : $f+g$ est une fonction croissante sur : $[3;+\infty[$

6) On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in D_h$

a) Détermination de D_h : $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$

On a : $D_f=[3,+\infty[$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

Donc : $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 3 \text{ et } \sqrt{x-3}\neq-1\}=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 3\}=[3;+\infty[$

Donc : $D_h=[3;+\infty[$

b) Ecriture de $h(x)$ en fonction de x : On a : $f(x)=\sqrt{x-3}$ et $g(x)=\frac{x-3}{x+1}$

Donc : $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{\sqrt{x-3}-3}{\sqrt{x-3}+1}$; $\forall x\in[3;+\infty[$

c) Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[3;+\infty[$

On a : $h(x)=(g\circ f)(x)$

Puisque f est croissante sur $[3;+\infty[$ et $f([3;+\infty[)\subset[0;+\infty[$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $[3;+\infty[$

Exercice 29 : 1) Calculer : $E(4.2)$; $E(-3.26)$; $E(\sqrt{3})$; $E\left(\frac{1}{2}\right)$; $E(\pi)$

PROF: ATMANI NAJIB

2) Déterminer : $E\left(3+\frac{1}{n}\right)$ si $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Solutions : 1) On a : $4\leq 4.2\prec 4+1$ donc $E(4.2)=4$

On a : $-4\leq -3.26\prec -3$ donc $E(-3.26)=-4$

On a : $0\leq \frac{1}{2}\prec 1$ donc $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

On a : $3\leq \pi\prec 3+1$ donc $E(\pi)=3$

2) On a : $n\geq 2$ alors : $0\leq \frac{1}{n}\prec 1$ donc : $E\left(\frac{1}{n}\right)=0$

$E\left(3+\frac{1}{n}\right)=3+E\left(\frac{1}{n}\right)=3+0=3$

Exercice 30 : Soit la fonction F définie par :

$\forall x\in\mathbb{R} : F(x)=x-E(x)$ (partie fractionnaire d'un nombre)

1)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $0\leq F(x)\prec 1$ c'est-à-dire montrer que F est bornée

2) Montrer que la fonction F est périodique de période 1.

3) Montrer que : $\forall x\in[0;1[$; $F(x)=x$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $F(x)=0$

5)Tracer (C_f) la représentation graphique de la fonction F sur : $I=[-5;5[$

6)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)\leq E(x+y)$

7)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)+E(x+y)\leq E(2x)+E(2y)$

Solution : $D_F=\mathbb{R}$

1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $0\leq F(x)\prec 1$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\leq x\prec E(x)+1$ par définition

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)-E(x)\leq x-E(x)\prec E(x)-E(x)+1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $0\leq x-E(x)\prec 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $0\leq F(x)\prec 1$

Par exemple : $F(4.2)=4.2-E(4.2)=4.2-4=0.2$ et $0\leq 0.2\prec 1$

2) a) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a: $F(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=F(x)$

L'application F est donc périodique de période 1.

3) Montrons que : $\forall x\in[0;1[$; $F(x)=x$

Soit : $x\in[0;1[$

$x\in[0;1[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 1$ Donc : $F(x)=0$

PROF: ATMANI NAJIB

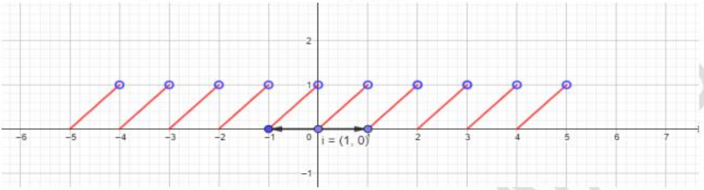
$F(x)=x-E(x)=x-0=x$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $F(x)=0$

$F(x)=0 \Leftrightarrow x-E(x)=0 \Leftrightarrow E(x)=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

D'où : $S=\mathbb{Z}$

5)Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I=[-5;5[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



6) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)\le E(x+y)$

Pour cette inégalité, qui est en fait une des propriétés énoncées dans le cours. Nous allons utiliser ce qu'on appelle la fonction partie fractionnaire d'un nombre

$F(x)=x-E(x) \Leftrightarrow x=E(x)+F(x) \Leftrightarrow E(x)=x-F(x)$

Soient : $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$;

$E(x+y)=E\big(E(x)+F(x)+E(y)+F(y)\big)=E(x)+E(y)+E\big(F(x)+F(y)\big)$ et $F(x)+F(y)\ge 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)\le E(x+y)$

7) Maintenant, via le même procédé :

Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

On a d'une part : $E(x+y)+E(x)+E(y)=E\big(E(x)+F(x)+E(y)+F(y)\big)+E(x)+E(y)$

$$=E\big(F(x)+F(y)\big)+2E(x)+2E(y)$$

D'autre part : $E(2x)+E(2y)=E\big(2(E(x)+F(x))\big)+E\big(2(E(y)+F(y))\big)$

$$=E\big(2E(x)+2F(x)\big)+E\big(2E(y)+2F(y)\big)$$

$=2E(x)+E\big(2F(x)\big)+2E(y)+E\big(2F(y)\big)=2E(x)+2E(y)+E\big(2(F(x)+F(y))\big)$???

Or : $F(x)+F(y)\le 2\big(F(x)+F(y)\big)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

Exercice 31 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{1}{1-E(x)}$ 2) $f(x)=\dfrac{x+4}{2E(x)-3}$ 3) $f(x)=\sqrt{x-E(x)}$ 4) $f(x)=\dfrac{2x-9}{\sqrt{x-E(x)}}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{1}{1-E(x)}$

PROF: ATMANI N

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - E(x) \neq 0\}$

$1 - E(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \prec 1+1 \Leftrightarrow 1 \leq x \prec 2 \Leftrightarrow x \in [1;2[$

D'où : $D_f = \mathbb{R} - [1;2[=]-\infty;1[\cup [2;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x+4}{2E(x)-3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2E(x) - 3 \neq 0\}$

$2E(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow E(x) = \dfrac{3}{2}$ Impossible

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - E(x) \geq 0\}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; On a : $E(x) \leq x \prec E(x) + 1 \Rightarrow E(x) \leq x \Rightarrow 0 \leq x - E(x)$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{2x-9}{\sqrt{x - E(x)}}$: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - E(x) \succ 0\}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; On a : $E(x) \leq x \prec E(x) + 1 \Rightarrow E(x) \leq x \Rightarrow 0 \leq x - E(x)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - E(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / E(x) \neq x\} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Exercice 32 : Montrer que : $E\left(2\sqrt{n^2+n+1}\right)$ est impair.

Solution : On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $n^2 + n + \dfrac{1}{4} \prec n^2 + n + 1 \prec n^2 + 2n + 1$ (vérification simple)

Donc : $\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 \prec n^2 + n + 1 \prec (n+1)^2$

Donc : $\sqrt{\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2} \prec \sqrt{n^2+n+1} \prec \sqrt{(n+1)^2}$

Donc : $n + \dfrac{1}{2} \prec \sqrt{n^2+n+1} \prec n+1$

Donc : $2n+1 \prec 2\sqrt{n^2+n+1} \prec 2n+2$

Donc : $2n+1 \leq 2\sqrt{n^2+n+1} \prec (2n+1)+1$

Donc : $E\left(2\sqrt{n^2+n+1}\right) = 2n+1$ est impair.

C'est-à-dire : $E\left(2\sqrt{n^2+n+1}\right)$ est impair.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB