http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°2 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{2x+|x|}{x+3}-\frac{7x^2-5}{x-3}$ 2) $f(x)=\frac{2x^5-2023}{x^2+3x+10}$ 3) $f(x)=\frac{6x^3+|2x|}{|x-3|-|x+5|}$

4) $f(x)=\frac{2x-21}{2x-3\sqrt{x}-2}$ 5) $f(x)=\frac{|x^2-6|}{\sqrt{-2x^2+4x-2}}$ 6) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x(2x-1)}}$

7) $f(x)=\sqrt{2|x-9|-1}$ 8) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$ 9) $f(x)=\frac{2\sin x}{\tan x-\sqrt{3}}$ 10) $f(x)=\frac{x^2+5x-1}{\sin x\times\cos 2x}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{2x+|x|}{x+3}-\frac{7x^2-5}{x-3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+3\neq0\ \ et\, x-3\neq0\ \}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq-3\ \ et\, x\neq3\ \}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{-3;3\}$

2) $f(x)=\frac{2x^5-2023}{x^2+3x+10}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+3x+10\neq0\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$: a = 1, b = 3 et c = 10
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle
C'est-à-dire : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{6x^3+|2x|}{|x-3|-|x+5|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-3|-|x+5|\neq0\ \}$

$|x-3|-|x+5|=0$ Signifie que : $|x-3|=|x+5|$

Signifie que : $x-3=x+5$ ou $x-3=-(x+5)$

Signifie que : $-3=5$ (impossible) ou $x-3=-x-5$
Signifie que : $2x=-2$
Signifie que : $x=-1$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

4) $f(x)=\frac{2x-21}{2x-3\sqrt{x}-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x-3\sqrt{x}-2\neq0\ \ et\ \ x\geq0\ \}$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Equivalent à : $2\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-2=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

PROF: ATMANI NAJIB

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$: a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2} \text{ et } X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$$

Equivalent à : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$ Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ c'est-à-dire : $x=4$

Donc : $D_f=[0;+\infty[-\{4\}=[0;4[\cup]4;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{|x^2-6|}{\sqrt{-2x^2+4x-2}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/-2x^2+4x-2>0\ \}$

Étudions le signe du trinôme de : $-2x^2+4x-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double : $x_1=\dfrac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

Comme : $a=-2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

Donc : $D_f=\varnothing$

29) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x(2x-1)}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x(2x-1)\neq 0\ \ et\ \ \dfrac{x-1}{x(2x-1)}\geq 0\right\}$

$x-1=0$ Équivaut à : $x=1$ et $2x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x(2x-1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $S = \left]0;\frac{1}{2}\right[\cup [1;+\infty[$

6) $f(x) = \sqrt{2|x-9|-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2|x-9|-1 \geq 0\}$

$2|x-9|-1 \geq 0$ Signifie que : $2|x-9| \geq 1$

Signifie que : $|x-9| \geq \frac{1}{2}$

Signifie que : $x-9 \geq \frac{1}{2}$ ou $x-9 \leq -\frac{1}{2}$

Signifie que : $x \geq \frac{1}{2}+9$ ou $x \leq -\frac{1}{2}+9$

Signifie que : $x \geq \frac{19}{2}$ ou $x \leq -\frac{17}{2}$

Donc : $D_f = \left]-\infty;-\frac{17}{2}\right] \cup \left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

7) $f(x) = 2\sin^2 x + 3\cos x - 1$: Un réel a toujours une image par f

Donc $D_f = \mathbb{R}$

8) $f(x) = \frac{2\sin x}{2\cos x - 1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2\cos x - 1 \neq 0\}$

$2\cos x - 1 = 0$ Signifie $\cos x = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Signifie que : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

9) $f(x) = \frac{2\sin x}{\tan x - \sqrt{3}}$. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ et \ \tan x - \sqrt{3} \neq 0 / k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\tan x - \sqrt{3} = 0$ Signifie $\tan x = \sqrt{3}$

C'est-à-dire $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Signifie $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

10) $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{\sin x \times \cos 2x}$;

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \ et \ \sin x \times \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \ et \ \sin x \neq 0 \ et \ \cos 2x \neq 0$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \ et \ x \neq k\pi \ et \ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad et \quad x \neq k\pi \quad et \quad x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ k\pi ; \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice2 : Soit f la fonction numérique définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x)=\sqrt{\cos x \times \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$

Déterminer D_f

Solution : $x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0;\pi] \quad et \quad \cos x \times \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ x \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{cases} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ x \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=X : \begin{cases} \cos(X) > 0 \\ X \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow X \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$$

$$\begin{cases} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ x \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow X+\frac{\pi}{4} \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right] \Leftrightarrow 2x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right] \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{8};\pi\right]$$

Tableau de signe :

x	0		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$cosx$		+		+	0	−		−	
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$		+	0	−		−	0	+	
Produit		+	0	−	0	+	0	−	

Donc : $D_f = \left[0;\frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{8}\right]$

Exercice3 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=\frac{4x^3}{x+1} & si \quad x \leq 0 \\ f(x)=\frac{2\sin x+1}{4x^2-9} & si \quad x > 0 \end{cases}$

Déterminer D_f

Solution : *Remarque :* $\begin{cases} f(x)=f_1(x) & si \quad x \in I_1 \\ f(x)=f_2(x) & si \quad x \in I_2 \end{cases}$

$D_f = \left(D_{f_1} \cap I_1\right) \cup \left(D_{f_2} \cap I_2\right)$

On pose : $f_1(x)=\frac{4x^3}{x+1}$ et $I_1 =]-\infty;0]$ et $f_2(x)=\frac{2\sin x+1}{4x^2-9}$ et $I_2 =]0;+\infty[$

PROF. ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

$D_{f_1} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ et $D_{f_2} = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left]-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$D_{f_1}\cap I_1 =]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ et $D_{f_2}\cap I_2 = \left]0;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right]$

Donc : $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0]\cup\left]0;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right]$

Donc : $D_f =]-\infty;-2[\cup\left]-2;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice4 : Soit f la fonction numérique tel que : $f\left(\frac{3x-2}{2x+3}\right)=\frac{8x+12}{9x-6}$

Calculer : $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Solution : On a : $f\left(\frac{3x-2}{2x+3}\right)=\frac{8x+12}{9x-6}=\frac{4}{3}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)$

On pose : $t=\frac{3x-2}{2x+3}$

Donc : $f(t)=\frac{4}{3t}$ par suite : $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{2}$

Exercice5 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 2) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$ 3) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 4) $f(x)=2\sin x-x^3(1-\cos x)$

5) $h(x)=\frac{\tan^4 x}{1+\sin^2 x}$

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$

- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

$f(-x)=f(x)$

Donc : f est une fonction paire

2) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0 \Leftrightarrow x^2=-5$ pas de solutions

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

PROF . ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

- $f(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\frac{-2x^3}{x^2+5}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc : f est une fonction impaire

3) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

$f(-1)=(-1)^2+\frac{1}{-1}=1-1=0$ et $f(1)=1^2+\frac{1}{1}=1+1=2$

On a : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : $\exists x=1\in\mathbb{R}\ /\ f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : f est une fonction ni paire ni impaire,

4) $f(x)=2\sin x-x^3(1-\cos x)$

On a : $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=2\sin(-x)-(-x)^3(1-\cos(-x))$

$f(-x)=-2\sin x+x^3(1-\cos x)$

Car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-(2\sin x-x^3(1-\cos x))=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire .

5) $h(x)=\frac{\tan^4 x}{1+\sin^2 x}$ $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ et\ 1+\sin^2 x\neq 0\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Et puisque : $1+\sin^2 x\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors : $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞ $h(-x)=\frac{\tan^4(-x)}{1+\sin^2(-x)}=\frac{(-\tan x)^4}{1+(-\sin x)^2}=\frac{(\tan x)^4}{1+(\sin x)^2}=h(x)$ Car $\tan(-x)=-\tan x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Donc g est une fonction paire.

Exercice6 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{2}(|x+2|-|x-2|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f.
3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=[0;2]$ et $J=[2;+\infty[$.
4) Dresser son tableau de variation sur D_f

PROF. ATMANI NAJIB

5) Soit (C_f) la courbe de f .

a) Est ce que les points $A(2;2)$ et $B(1;2)$ et $c(3;5)$ et $D(3;2)$ appartiennent à la courbe (C_f)

b) Tracer la courbe (C_f) dans un repère : $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

Solution : 1) Un réel a toujours une image. Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) ☞Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

☞ $f(-x) = \frac{1}{2}(|-x+2| - |-x-2|) = \frac{1}{2}(|-(x-2)| - |-(x+2)|)$

$f(-x) = \frac{1}{2}(|(x-2)| - |(x+2)|)$ Car $|-x| = |x|$

$f(-x) = -\frac{1}{2}(|-(x-2)| + |(x+2)|)$

$f(-x) = -\frac{1}{2}(||(x+2)| - (x-2)||) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_f) il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E = \mathbb{R}^+$

3) si $x \in I = [0;2]$ alors : $0 \le x \le 2$

Donc : $x-2 \le 0$ et $x+2 \ge 0$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{2}(x+2-(-(x-2))) = \frac{1}{2}(x+2+x-2) = x$

Si $x \in J = [2;+\infty[$ alors : $x \ge 2$

Donc : $x-2 \ge 0$ et $x+2 \ge 0$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{2}(x+2-(x-2)) = \frac{1}{2}(x+2-x+2) = 2$

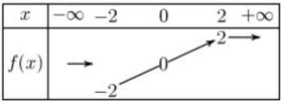
Finalement on a : $\begin{cases} f(x) = x \text{ si } x \in I = [0;2] \\ f(x) = 2 \text{ si } x \in J = [2;+\infty[\end{cases}$

4) Tableau de variation sur D_f :

On a : f est constante sur l'intervalle : $J = [2;+\infty[$ et croissante dans $I = [0;2]$

Et puisque f est une fonction impaire alors f est constante sur l'intervalle : $J' =]-\infty;-2]$

et croissante dans $I' = [-2;0]$ d'où le tableau de variation suivant :


x
$-\infty$
-2
0
2
$+\infty$
$f(x)$
-2
0
2

a) On a : $f(2) = \frac{1}{2}(|2+2| - |2-2|) = 2$ donc : $A(2;2) \in (C_f)$

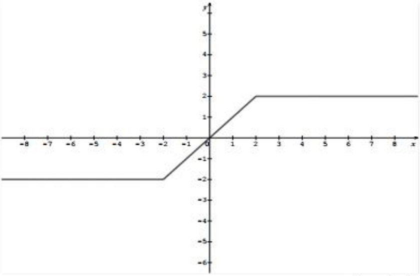
On a : $f(1) = \frac{1}{2}(|1+2| - |1-2|) = 1 \ne 2$ donc : $B(1;2) \notin (C_f)$

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $f(3)=\frac{1}{2}(|3+2|-|3-2|)=2\neq 5$ donc : $C(3;5)\notin(C_f)$

On a : $f(3)=2$ donc : $D(3;2)\in(C_f)$

b) f est une fonction impaire donc (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère



Exercice7 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{|x-2|+|x+2|+\cos x}{2025|x|-2026}$

(C_f) La courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2025|x|-2026\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|\neq\frac{2026}{2025}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{2026}{2025};\frac{2026}{2025}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{2026}{2025};\frac{2026}{2025}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{2026}{2025};\frac{2026}{2025}\right\}$

- $f(-x)=\frac{|-x-2|+|-x+2|+\cos(-x)}{2025|-x|-2026}=\frac{|-(x+2)|+|-(x-2)|+\cos x}{2025|x|-2026}=\frac{|x+2|+|x-2|+\cos x}{2025|x|-2026}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice8 : Les fonction f et g définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x}}$

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f, on doit avoir : $\frac{2x-1}{x}\geq 0$ et $x\neq 0$

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-1}{x}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Donc : ce qui donne : $D_f = \left]-\infty;0\right[\cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Pour g, on doit avoir $2x-1 \geq 0$ et $x>0$ c'est-à-dire : $x \geq \frac{1}{2}$ et $x>0$

Ce qui donne $D_g = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

On a donc $D_f \neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f \neq g$

On remarquera cependant que sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ On a : f (x) = g(x)

Exercice9 : Soient les deux fonctions définies de $[1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

et $g(x)=\begin{cases} 2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{x-1} & si \quad x>2 \end{cases}$

Montrer que : $f = g$

Solution : Soit $x \in [1;+\infty[$:

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

Si : $1 \leq x \leq 2$ alors : $\sqrt{x-1}-1 \leq 0$ et $\sqrt{x-1}+1>0$

Donc : $f(x)=\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2=g(x)$

Si : $x>2$ alors : $\sqrt{x-1}-1 \geq 0$ et $\sqrt{x-1}+1>0$

Donc : $f(x)=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}=g(x)$

Par suite : $\forall x \in [1;+\infty[\ : f(x)=g(x)$

Par suite : $f = g$

Exercice10 : Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à la courbe de g où :

$f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ et $g(x)=x+1$

Solution : On a $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}$

Donc : $D_f \cap D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=D_f$

Etudions la position relative de la courbe de f par rapport à la courbe de g sur $\mathbb{R}-\{-1\}$

Méthode : Pour cela étudions le signe de : $f(x)-g(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

$$f(x)-g(x)=x+\frac{1}{x+1}-x-1=\frac{1}{x+1}-1=\frac{1-x-1}{x+1}=\frac{-x}{x+1}$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x$		+		+	0	-	
$x+1$		-	0	+		+	
$f(x)-g(x)$		-	‖	+	0	-	
Position relative de (C_f) et (C_g)		(C_f) est au-dessous de (C_g)		(C_f) est au-dessus de (C_g)	0	(C_f) est au-dessous de (C_g)	

Exercice11 : Montrer que la fonction $f:x\to x-E(x)$ est périodique de période 1.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

a) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a: $f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

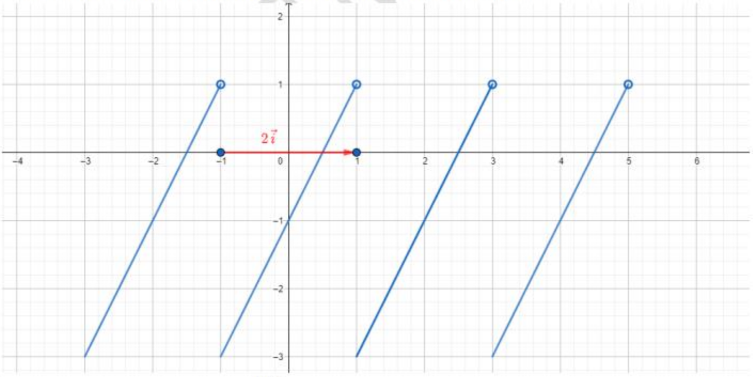
Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

Tel que : $f(x)=2x-1 \quad \forall x\in[-1;1[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;5[$ dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(2026)$

Solution :1) la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;5[$ est :



ATMANI NAJIB

2) Calculons : $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(2026)$

On a : $f(x)=2x-1 \quad \forall x\in[-1;1[$

$\rightarrow -1\in[-1;1[$ Donc : $f(-1)=2(-1)-1=-3$

$\rightarrow 0\in[-1;1[$ Donc : $f(0)=2\times 0-1=--1$

$\rightarrow \frac{1}{2}\in[-1;1[$ Donc : $f(0)=2\times\frac{1}{2}-1=1-1=0$

$\rightarrow 1\notin[-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(1)=f(-1+2)=f(-1)=-3$ car f est 2 périodique

$\rightarrow 2\notin[-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(2)=f(0+2)=f(0)=-1$ car f est 2 périodique

$\rightarrow 2026\notin[-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(2026)=f(0+2\times 1013)=f(0)=-1$

Car f est périodique de période $T=2$ et aussi $T'=1013\times 2$ est une période

Exercice13 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+4x+3$

1) Préciser le domaine de définition de f
2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$
3) Etudier la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$
4) Dresser le tableau de variation de f
5) En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$
6) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère
7) Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9)Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)>g(x)$

Solution : $f(x)=-x^2+4x+3$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2^2+4x_2+3)-(-x_1^2+4x_1+3)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2^2+4x_2+3+x_1^2-4x_1-3}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_2^2+x_1^2+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2^2-x_1^2)+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

PROF: ATMANI NAJIB

$$T(x_1;x_2)=\frac{-(x_2-x_1)(x_2+x_1)+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(-(x_2+x_1)+4)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=-(x_1+x_2)+4$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$

Soients : $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\geq 2$ et $x_2\geq 2$ implique $x_1+x_2\geq 4$

Donc $-(x_1+x_2)\leq -4$ par suite : $-(x_1+x_2)+4\leq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I=[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;2]$

Soients : $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$ alors : $x_1\leq 2$ et $x_2\leq 2$ cela implique $x_1+x_2\leq 4$

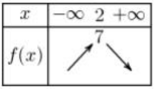
Donc $-(x_1+x_2)\geq -4$ par suite : $-(x_1+x_2)+4\geq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\geq 0$

D'où : f est croissante sur $J=]-\infty;2]$

4) Tableau de variation : On a : $f(2)=-2^2+4\times 2+3=-4+8+3=7$

Donc :



5) $f(2)=7$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times 3=16+12=28>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2(2-\sqrt{7})}{-2}=2-\sqrt{7}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2(2+\sqrt{7})}{-2}=2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(2-\sqrt{7};0)$ et $D(2+\sqrt{7};0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

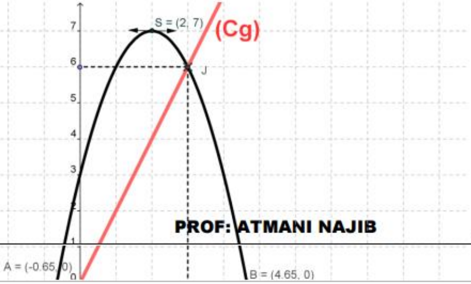
Et on a $f(0)=-0^2+4\times 0+3=3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

7) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :

PROF. ATMANI NA

-1	0	1	2	3	4	5
-2	3	6	7	6	3	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -1$ et $x = 3$ donc $S = \{-1; 3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 + 4x + 3 = 2x$ c'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 = 0$ $a = -1$ et $b = 2$ et $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$

Donc : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$

Donc : $S = \{-1; 3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-1; 3[$

Donc $S =]-1; 3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

$f(x) \succ g(x)$ Signifie $-x^2 + 4x + 3 \succ 2x$

C'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 \succ 0$

Les racines sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left]-1;3\right[$

Exercice 14 : Etudier les variations des fonctions définies par :

1) $f(x)=x^3$ 2) $g(x)=-\frac{1}{4}x^3$ 3) $h(x)=2026x^3-2025$ 4) $k(x)=\frac{2024}{x}$

Solution : 1) $f(x)=x^3$ et $D_f=\mathbb{R}$

On sait que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	↗

2) $g(x)=-\frac{1}{4}x^3$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc : $g=-\frac{1}{4}f$

On puisque que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que : $-\frac{1}{4}<0$

Alors : $g=-\frac{1}{4}f$:est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	↘

3) $h(x)=2026x^3-2025$ et $D_h=\mathbb{R}$ donc : $h=2026f-2025$

On puisque que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que : $2026>0$

Alors : $2026f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et aussi : $h=2026f-2025$ est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	↗

4) $k(x)=\frac{2024}{x}$ et $D_k=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ et $k=2024v$

Alors : k est décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et est décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ car $2024>0$

Exercice15 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x|x|}{x^2+4}$

1) Etudier la parité de f

2) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

PROF: ATMANI NAJIB

3) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^-$

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) On a : $x^2+4>0$ donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x : si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\dfrac{-x|-x|}{(-x)^2+4}=\dfrac{-x|x|}{x^2+4}=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) Soient : $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$ deux réels tel que : $x_1\neq x_2$ et $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}^+$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2}{x_1{}^2+4}-\frac{x_2^2}{x_2{}^2+4}=\frac{4\left(x_1^2-x_2^2\right)}{(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4)}=\frac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4)}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4)}\times\dfrac{1}{x_1-x_2}=4\dfrac{x_1+x_2}{(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4)}$

Comme : $x_1\geq 0$ et $x_1\geq 0$ et $x_1\neq x_2$ alors : $x_1+x_2>0$

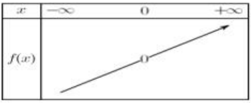
Par suite : $T(x_1;x_2)=4\dfrac{x_1+x_2}{(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4)}>0$ car $(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4)>0$ et $4>0$

D'où : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

3) f est impaire et le symétrique de $I=\mathbb{R}^+$ est l'intervalle $I'=\mathbb{R}^-$

Puisque : f est strictement croissante sur $I=\mathbb{R}^+$ alors f est strictement croissante sur $I'=\mathbb{R}^-$

4) Par suite le tableau de variations de f sur D_f est :


x
$-\infty$
0
$+\infty$
f(x)
0

Exercice 16 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$

1) Développer $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2$

2) Démontrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}$

$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2=x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2=2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}$

2) Démontrons que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\leq\dfrac{1}{2}$

$f(x)-\frac{1}{2}=x\sqrt{x^2+1}-x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+2x^2-2x\sqrt{x^2+1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2$

Or : $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2>0$ donc : $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2<0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Ainsi : $f(x)<\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : f est majorée par $\frac{1}{2}$

Exercice 17 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+2x+3}$

Démontrer que f est minorée par -2

Solution :1) montrons que f est minorée par -2

C'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $-2\le f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-(-2)=x-1+\sqrt{x^2+2x+3}+2=x+1+\sqrt{x^2+2x+3}$

On a : $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>(x+1)^2$

Donc : $\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{(x+1)^2+2}>\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

Or : $|x+1|\ge-(x+1)$ (et aussi : $|x+1|\ge(x+1)$)

D'où : $\sqrt{x^2+2x+3}>-(x+1)$

D'où : $\sqrt{x^2+2x+3}+x+1>0$

Ainsi : $f(x)-(-2)>0$ C'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R}$ $-2\le f(x)$

Par suite : f est minorée par -2

Exercice18 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=\frac{x-x^2}{x^2+1}$

1) Montrer que : $\frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$

2) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}$

$\frac{1}{2}-\frac{|x|}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2|x|}{2(x^2+1)}=\frac{|x|^2-2|x|+1}{2(x^2+1)}=\frac{(|x|-1)^2}{2(x^2+1)}\ge0$

Ainsi : $\frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2) Démontrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $f(x)=\frac{x-x^2}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}$

Or : $0\le x^2<x^2+1$ donc : $0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1$ d'où : $-1<\frac{-x^2}{x^2+1}\le0$ (1)

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $\frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ -\frac{1}{2}\le\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$ (2)

De : (1) et (2) on déduit que : $-\frac{3}{2}<\frac{x}{x^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$

Ainsi : $-\frac{3}{2}<f(x)\le\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : f est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 19 : Soit f une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+3x+4$

Montrer que g admet une valeur maximale sur $\mathbb{R}$ qu'il faut déterminer.

Solution : On a $D_g=\mathbb{R}$; $g(x)=-x^2+3x+4=-(x^2-3x)+4$

$$g(x)=-\left(x^2-2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

Et on a pour tous $x\in\mathbb{R}$: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\ge 0$

Par suite : $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\le 0$ et donc : $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\le\frac{25}{4}$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)\le\frac{25}{4}$ et on a : $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$

Alors : $g(x)\le g\left(\frac{3}{2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Par conséquent : $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$ c'est la valeur Maximal de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 20 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\ne 0\ \text{et}\ x\ge 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\ne -2\ \text{et}\ x\ge 0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\ge -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x)-(-1)=f(x)+1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\ge 0$$

Donc $f(x)\ge -1\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et on a :

$$f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0\Leftrightarrow x=0$$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

PROF: ATMANI NAJIB

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x)\geq f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^{+}$

3) Soit $x\in\mathbb{R}^{+}$ $\quad f(x)-1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\frac{-4}{\sqrt{x}+2}\prec 0$

Donc : $f(x)\prec 1\quad \forall x\in\mathbb{R}^{+}$

Donc : f est donc majorée sur $\mathbb{R}^{+}$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^{+}$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

Exercice 21 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-x}}$ et $g(x)=\frac{x^{2}}{x^{2}+1}$

1) Déterminer : D_f et D_g

2) Déterminer la fonction $g\circ f$

3) Déterminer la fonction $f\circ g$

Solution : 1) →On a : $x\in D_f \Leftrightarrow x^{2}-x>0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x2-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc : $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

→On a : $x\in D_g \Leftrightarrow x^{2}+1\neq 0$ toujours vérifier

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

Donc : $D_g=\mathbb{R}$

2) Déterminons la fonction $g\circ f$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\right\}$

$x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[\ et\ \ f(x)\in\mathbb{R}$

$x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc : $D_{g\circ f}=\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\frac{\left(f(x)\right)^{2}}{\left(f(x)\right)^{2}+1}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^{2}-x}}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{x^{2}-x}}\right)^{2}+1}=\frac{\frac{1}{x^{2}-x}}{\frac{1}{x^{2}-x}+1}=\frac{\frac{1}{x^{2}-x}}{\frac{x^{2}-x+1}{x^{2}-x}}=\frac{1}{x^{2}-x+1}$$

Donc : $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x^{2}-x+1}\ ;\ \forall x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) Déterminons la fonction $f\circ g$

$D_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \in D_g$ *et* $g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $\frac{x^2}{x^2+1} \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $\frac{x^2}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $x^2 > x^2+1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $0 > 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Donc : $D_{f\circ g} = \varnothing$ et la fonction $f \circ g$ n'est pas définie

Exercice 22 : Soit les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & si\ x \le 3 \\ 3 & si\ x > 3 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} x^2-10 & si\ x > 1 \\ x-5 & si\ x \le 1 \end{cases}$

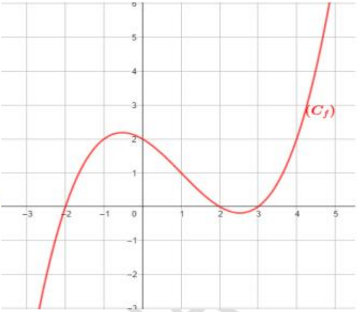
Calculer : $(f \circ g \circ f)(7)$

Solution : 1) →On a :

$(f \circ g \circ f)(7) = (f \circ g)(f(7)) = (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3^2-10) = f(-1) = 5\times(-1)-4 = -9$

Exercice 23 : Soit si contre :

(C_f) La courbe représentative d'une fonction f



1) Déterminer des valeurs de x si on sait que :

$(f \circ f)(2x-1) = 2$

2) Calculer : $g(2)$ si on sait que :

$(g \circ f)(x) = \frac{x^3-3x^2+10}{x+1}$

Solution : 1) Déterminons des valeurs de x si on sait que : $(f \circ f)(2x-1) = 2$

$(f \circ f)(2x-1) = 2 \Leftrightarrow f(f(2x-1)) = 2 \Leftrightarrow f(2x-1) = 0$

car $f(0) = 2$

$\Leftrightarrow 2x-1 = -2$ *ou* $2x-1 = 2$ *ou* $2x-1 = 3$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ *ou* $x = \frac{3}{2}$ *ou* $x = 2$

2) Calculons : $g(2)$ si on sait que : $(g \circ f)(x) = \frac{x^3-3x^2+10}{x+1}$

On a : $(g \circ f)(x) = \frac{x^3-3x^2+10}{x+1}$ donc : $g(f(x)) = \frac{x^3-3x^2+10}{x+1}$ et comme : $f(0) = 2$

Alors : $g(f(0)) = \frac{0^3-3\times0^2+10}{0+1} \Leftrightarrow \boxed{g(2) = 10}$

Exercice 24 : Soit h une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{x^2+2}$

En utilisant les propriétés de la monotonie des fonctions composées
Etudier les variations de h

Solutions : On a : $D_f = \mathbb{R}$

On peut décomposer la fonction h et l'écrire sous la forme : $h = g \circ f$

$f(x) = x^2+2$ et $g(x) = \sqrt{x}$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+2}$

Tableau de variation de f :

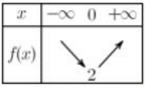
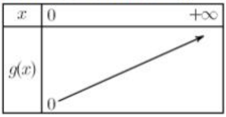

x
$-\infty$
0
$+\infty$
$f(x)$
2

Tableau de variation de g :


x
0
$+\infty$
$g(x)$
0

a) On a : $h(x)=(g\circ f)(x)$

$\rightarrow$Sur $[0;+\infty[$: On a $x\in[0;+\infty[\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow x^2\geq 0\Rightarrow x^2+2\geq 2\Rightarrow f(x)\geq 2\Rightarrow f(x)\in[2;+\infty[$

$\Rightarrow f(x)\in[0;+\infty[$

Donc : $f([0;+\infty[)\subset[0;+\infty[$

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $f([0;+\infty[)\subset[0;+\infty[$ et g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors : $h=g\circ f$ est croissante sur $[0;+\infty[$

$\rightarrow$Sur $]-\infty;0]$: On a $x\in]-\infty;0]\Rightarrow x\leq 0\Rightarrow x^2\geq 0\Rightarrow x^2+2\geq 2\Rightarrow f(x)\geq 2\Rightarrow f(x)\in[2;+\infty[$

$\Rightarrow f(x)\in[0;+\infty[$

Donc : $f(]-\infty;0])\subset[0;+\infty[$

Puisque f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et $f(]-\infty;0])\subset[0;+\infty[$ est g strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors : $h=g\circ f$ est décroissante sur $]-\infty;0]$

Exercice 25 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x-1}$ et $f(x)=-x^2+2x+1$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;1)$

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2-2x-1+\sqrt{x-1}\prec 0$

5) Déterminer graphiquement les images de $[0;1]$ et $[1;2]$ pat f

6) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$

a) Déterminer D_h

PROF: ATMANI NAJIB

b) Vérifier que : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in D_h$

c) Étudier la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;2]$

Solution :1) $f(2)=g(2)=1\Rightarrow\ A(2;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

2) Déterminons les tableaux de variations de f et g

Pour : $g(x)=\sqrt{x-1}\quad D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}=[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	$+\infty$

Pour : $f(x)=-x^2+2x+1$; On a f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

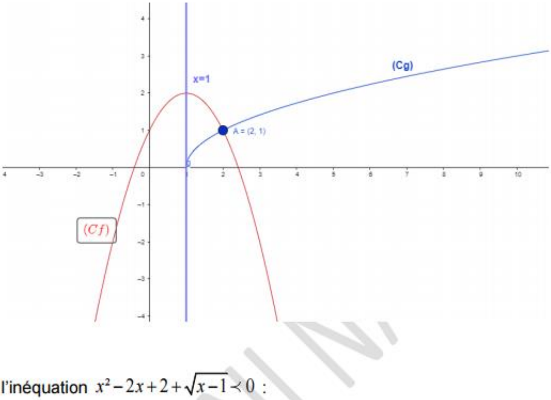
On utilisant le résumé de notre cours :

On a : $a=-1\prec 0$ et $b=2$ et $c=1\ \ (f(x)=ax^2+bx+c)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1$ et $f(\alpha)=f(1)=-(1)^2+2\times1+1=2$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	2	↘



3) Traçage des courbes (C_f) (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résolution graphique de l'inéquation $x^2-2x+2+\sqrt{x-1}\prec 0$:

$x^2-2x-1+\sqrt{x-1}\prec 0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\prec -x^2+2x+1\Leftrightarrow g(x)\prec f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[-4;-1[\cup[0;+\infty[$

Donc : $S=]1;2[$

5) Détermination graphique des images de $[0;1]$ et $[1;2]$ pat f

$f([0;1])=[1;2]$ et $f([1;2])=[1;2]$

6) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+2x\geq 0\}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_h=[0;2]$

b) Vérifions que : $h(x)=(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_h$; On a : : $g(x)=\sqrt{x-1}$ et $f(x)=-x^2+2x+1$

Donc : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{-x^2+2x+1-1}=\sqrt{-x^2+2x}=h(x)$; $\forall x\in[0;2]$

c) Etude de la monotonie de h dans : $[0;1]$ et $[1;2]$

On a : $h(x)=(g\circ f)(x)$

Puisque f est croissante sur $[0;1]$ et $f([0;1])=[1;2]$ et g est croissante sur $[1;2]$ alors $g\circ f$ est croissante sur $[0;1]$

Puisque f est décroissante sur $[1;2]$ et $f([1;2])=[1;2]$ et g est croissante sur $[1;2]$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $[1;2]$

Exercice 26 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=x^3$ et $f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$

(C_f) ; (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Montrer que : $A(1;1)$ et $B(2;8)$ sont des points d'intersections de (C_f) et (C_g)
2) Étudier les variations de f et donner son tableau de variation.
3) Déterminer le tableau de variations de g
4) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
5) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{9x-10}{2x-3}\leq x^3$

Solution : 1) $A(1;1)$ et $B(2;8)$:

$f(1)=g(1)=1\Rightarrow A(1;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=g(2)=2\Rightarrow B(2;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

2) 1) $f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{3}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Étudions les variations de f et donner son tableau de variation.

En générale si : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=\frac{3}{2}$ et $y=\frac{9}{2}$

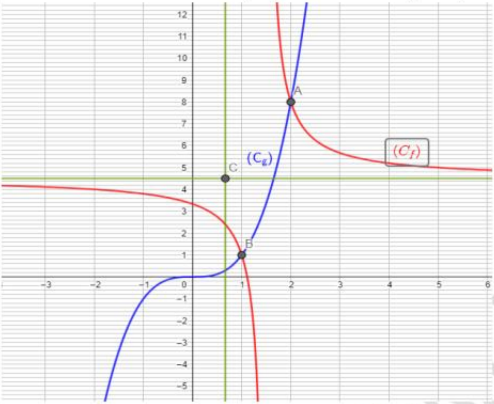
$f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}9 & -10\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-27+20=-7<0$

Donc :f est strictement décroissante sur : $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$

3)Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	↗	

4)Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$: g est impaire



5) Résolution graphique sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $\frac{9x-10}{2x-3} \leq x^3$

x	0	1	2
$g(x)$	0	1	8

$\frac{9x-10}{2x-3} \leq x^3 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessous de (C_g) si

$x \in \left[1; \frac{3}{2}\right[\cup [2; +\infty[$

Donc : $S = \left[1; \frac{3}{2}\right[\cup [2; +\infty[$

Exercice 04: Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) - 5$

1) Calculer : $f(6)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $f(x) = 5$

Solutions : 1) $f(6) = E\left(\frac{1}{2}(6+3)\right) - 5 = E\left(\frac{9}{2}\right) - 5 = E\left(\frac{8+1}{2}\right) - 5 = E\left(\frac{8}{2} + \frac{1}{2}\right) - 5 = E\left(4 + \frac{1}{2}\right) - 5 = 4 + E\left(\frac{1}{2}\right) - 5$

On a : $0 \leq \frac{1}{2} \prec 0+1$ donc $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Donc : $f(6) = 4 + 0 - 5 = -1$

2) $f(x) = 5 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) - 5 = 5 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) = 10$

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall p \in \mathbb{Z}$: $E(x) = p \Leftrightarrow p \leq x \prec p+1$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) = 10 \Leftrightarrow 10 \leq \frac{1}{2}(x+3) \prec 10+1 \Leftrightarrow 20 \leq x+3 \prec 22 \Leftrightarrow 20-3 \leq x \prec 22-3 \Leftrightarrow 17 \leq x \prec 19$

D'où : $S = [17; 19[$

Exercice 05: 1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall p \in \mathbb{Z}$: $E(x) = p \Leftrightarrow p \leq x \prec p+1$

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

2) Montrer que : $x - 1 \prec E(x) \leq x$; $\forall x \in \mathbb{R}$

3) a) Montrer que : $E(-x) = -E(x) - 1$; $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

b) Montrer que : $E(x+p) = E(x) + p$; $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$

c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $E\left(\frac{E(px)}{p}\right) = E(x)$

4) Calculer : a) $E\left(\frac{n+1}{n}\right)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ b) $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ c) $E\left(\sqrt{n^2+n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

PROF: ATMANI NAJIB

a) $E(5x+3)=4$ b) $E(x^2)=x$ c) $E\left(\frac{2x+3}{5}\right)=\frac{x-1}{2}$

Solutions : 1) a) Soit : $x\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$) Montrons que : $E(x)=p\Rightarrow p\leq x\prec p+1$

Supposons que : $E(x)=p$

On sait que : $E(x)$ est le plus grand entier relatif intérieur ou égale a x

Donc : $E(x)\leq x$ c'est-à-dire : $p\leq x$ ①

Or : $p+1\in\mathbb{Z}$ et $p+1\succ E(x)$ donc : $p+1$ entier relatif non intérieur ou égale a x

C'est-à-dire : $x\prec p+1$

①et ② donnent : $p\leq x\prec p+1$

Par suite : $E(x)=p\Rightarrow p\leq x\prec p+1$

$\Leftarrow$) Montrons que : $p\leq x\prec p+1\Rightarrow E(x)=p$

Supposons que : $p\leq x\prec p+1$ et $p\in\mathbb{Z}$ et montrons que : $E(x)=p$

On a : $p\leq x\prec p+1$ et $p\in\mathbb{Z}$ et on sait que :

$E(x)$ est le plus grand entier relatif intérieur ou égale a x

Donc : $p\leq E(x)$ ①

On a : aussi : $E(x)\leq x\prec p+1$ et donc : $E(x)\prec p+1$ c'est-à-dire : $E(x)\leq p$ ②

①et ② donnent : $E(x)=p$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall p\in\mathbb{Z}$: $E(x)=p\Leftrightarrow p\leq x\prec p+1$

Remarque : $\forall p\in\mathbb{Z}$; $\forall q\in\mathbb{Z}$; $q\prec p+1\Leftrightarrow q\leq p$

PROF: ATMANI

---

b) $\Rightarrow$) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $E(x)=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$

Supposons que : $E(x)=x$ Montrons que : $x\in\mathbb{Z}$

On a : $E(x)$ est un entier relatif intérieur ou égale a x

Donc : $E(x)\in\mathbb{Z}$ et $E(x)=x$ par suite : $x\in\mathbb{Z}$

$\Leftarrow$) Montrons que : $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow E(x)=x$

On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

Donc : $E(x)\leq x\leq E(x)$

Donc : $E(x)=x$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$: $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

2) On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$; $\forall x\in\mathbb{R}$

NAJIB

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\;\; E(x)\leq x$ et $x\prec E(x)+1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\;\; E(x)\leq x$ et $x-1\prec E(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\;\; x-1\prec E(x)\leq x$

3)a) Montrons que : $E(-x)=-E(x)-1$; $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$; donc : $x\in\mathbb{R}$ et $x\notin\mathbb{Z}$

Donc : $E(x)\prec x\prec E(x)+1$ car $E(x)\neq x$ $(x\notin\mathbb{Z})$

Donc : $-E(x)-1\prec -x\prec -E(x)$ c'est-à-dire : $-E(x)-1\prec -x\prec(-E(x)-1)+1$

Or : $-E(x)-1\in\mathbb{Z}$ car $E(x)\in\mathbb{Z}$

Donc : $E(-x)=-E(x)-1\quad\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

b) Montrons que : $E(x+p)=E(x)+p$; $\forall x\in\mathbb{R}\;\;\forall p\in\mathbb{Z}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{Z}$

On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

Donc : $(E(x)+p)\leq x+p\prec(E(x)+p)+1$ Or : $E(x)+p\in\mathbb{Z}$

Donc : $E(x+p)=E(x)+p$

c) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\;\;\forall p\in\mathbb{N}^*$; $E\left(\frac{E(px)}{p}\right)=E(x)$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{N}^*$

On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$ donc : $pE(x)\leq px\prec pE(x)+p$

Donc : $E(pE(x))\leq E(px)\leq E(pE(x)+p)$ Car E est croissante

Donc : $pE(x)\leq E(px)\prec pE(x)+p$ car $pE(x)\in\mathbb{Z}$ et $pE(x)+p\in\mathbb{Z}$

Donc : $E(x)\leq\frac{E(px)}{p}\prec E(x)+1$ (on divise par p)

Donc : $E\left(\frac{E(px)}{p}\right)=E(x)$

4) Calculons : a) $E\left(\frac{n+1}{n}\right)$ si $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $n\in\mathbb{N}^*$ donc : $n\geq1$

- ✓ Si : $n=1$: $E\left(\frac{n+1}{n}\right)=E\left(\frac{1+1}{1}\right)=E(2)=2$
- ✓ Si : $n\succ1$: $0\prec\frac{1}{n}\prec1\Rightarrow0\leq\frac{1}{n}\prec1\Rightarrow E\left(\frac{1}{n}\right)=0$

$E\left(\frac{n+1}{n}\right)=E\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=E\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+E\left(\frac{1}{n}\right)=1+0=1$

PROF:ATMANI NAJIB

b) $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=E\left(\frac{n^2+2n+1+3}{n+1}\right)=E\left(\frac{(n+1)^2+3}{n+1}\right)=E\left(\frac{(n+1)^2}{n+1}+\frac{3}{n+1}\right)=E\left(n+1+\frac{3}{n+1}\right)$$

$E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=E\left(\frac{n^2+2n+1+3}{n+1}\right)=n+1+E\left(\frac{3}{n+1}\right)$ car : $n+1\in\mathbb{N}$

On a : $n\in\mathbb{N}$ donc : $n\geq 0 \;\Rightarrow n\geq 0\Rightarrow n+1\geq 1$

- ✓ Si : $n=0$; $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=0+1+E\left(\frac{3}{0+1}\right)=1+E(3)=1+3=4$
- ✓ Si : $n=1 \; ou \; n=2\Rightarrow E\left(\frac{3}{n+1}\right)=1$ et donc : $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1+1=n+2$: :
- ✓ Si : $n\geq 3\Rightarrow n+1\succ 3\Rightarrow 0\prec\frac{3}{n+1}\prec 1$

$E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1+E\left(\frac{3}{n+1}\right)=n+1+0=n+1$

4) c) $E\left(\sqrt{n^2+n}\right)\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a : $n^2\leq n^2+n\prec (n+1)^2$ (vérification simple)

Donc : $\sqrt{n^2}\leq\sqrt{n^2+n}\prec\sqrt{(n+1)^2}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $n\leq\sqrt{n^2+n}\prec n+1$; $\forall n\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $E\left(\sqrt{n^2+n}\right)=n$

5) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) (E) : $E(5x+3)=4$

Remarque : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall p\in\mathbb{Z}$: $E(x)=p\Leftrightarrow p\leq x\prec p+1$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$$x\in S\Leftrightarrow E(5x+3)=4\Leftrightarrow 4\leq 5x+3\prec 4+1\Leftrightarrow 4\leq 5x+3\prec 5\Leftrightarrow 1\leq 5x\prec 2\Leftrightarrow\frac{1}{5}\leq x\prec\frac{2}{5}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right[$$

D'où : $S=\left[\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right[$

b) (E) : $E(x^2)=x$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$$x\in S\Leftrightarrow E(x^2)=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2=x\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x-1=0 \;\; ou \;\; x=0$$

$\Rightarrow x=1 \; ou \;\; x=0\;\Rightarrow x\in\{0;1\}$

Donc : $S\subset\{0;1\}$

Inversement : on doit montrer que : $\{0;1\} \subset S$?

On a : $0 \in S$ car : $E(0^2)=0$ et $1 \in S$ car : $E(1^2)=1$

D'où : $\{0;1\} \subset S$

Finalement : $S=\{0;1\}$

c) (E) : $E\left(\frac{2x+3}{5}\right)=\frac{x-1}{2}$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $E(x)=x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$x \in S \Leftrightarrow E\left(\frac{2x+3}{5}\right)=\frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{x-1}{2} \leq \frac{2x+3}{5} \prec \frac{x-1}{2}+1$

On pose : $\frac{x-1}{2}=k \in \mathbb{Z}$ et donc : $x=2k+1$ et $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{x-1}{2} \leq \frac{2x+3}{5} \prec \frac{x-1}{2}+1 \Leftrightarrow k \leq \frac{2(2k+1)+3}{5} \prec k+1 \Leftrightarrow k \leq \frac{4k+5}{5} \prec k+1 \Leftrightarrow 5k \leq 4k+5 \prec 5k+5$

$\Leftrightarrow 0 \leq 4k-5k+5 \prec 5 \Leftrightarrow 0 \leq -k+5 \prec 5 \Leftrightarrow -5 \leq -k \prec 0 \Leftrightarrow 0 \prec k \leq 5$ et $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow k \in \{1;2;3;4;5\}$

Et puisque : $x=2k+1$

Donc : $x \in \{3;5;7;9;11\}$

Inversement : on peut vérifier que : $\{3;5;7;9;11\} \subset S$

Finalement : $S=\{3;5;7;9;11\}$

Exercice 12 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{1}{2025-E(x)}$ 2) $f(x)=\frac{x^2+\sin x}{2025E(x)-2026}$ 3) $f(x)=\cos x \times \sqrt{x-E(x)}$ 4) $f(x)=\frac{3x^2-6\cos x}{\sqrt{x-E(x)}}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{1}{2025-E(x)}$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} / 2025-E(x) \neq 0\}$

$2025-E(x)=0 \Leftrightarrow E(x)=2025 \Leftrightarrow 2025 \leq x < 2025+1 \Leftrightarrow 2025 \leq x < 2026 \Leftrightarrow x \in [2025;2026[$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-[2025;2026[\,=\,]-\infty;2025[\,\cup\,[2026;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+\sin x}{2025E(x)-2026}$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} / 2025E(x)-2026 \neq 0\}$

$2025E(x)-2026=0 \Leftrightarrow E(x)=\frac{2026}{2025} \simeq 1{,}00049 \notin \mathbb{Z}$ Impossible

D'où : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\cos x\times\sqrt{x-E(x)}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\geq 0\right\}$

$\forall x\in\mathbb{R}$; On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1\Rightarrow E(x)\leq x\;\Rightarrow 0\leq x-E(x)$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\dfrac{3x^2-6\cos x}{\sqrt{x-E(x)}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\succ 0\right\}$

$\forall x\in\mathbb{R}$; On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1\Rightarrow E(x)\leq x\;\Rightarrow 0\leq x-E(x)$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,E(x)\neq x\right\}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Exercice 20 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)}$

1) Déterminer $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrer que la fonction f est périodique de période 1

3) Donner une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I=[0;1[$

4) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3[\cap D_f$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)}$

1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1-E(x)\neq 0\right\}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Methode1 : $\forall x\in\mathbb{R}$; On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1\Rightarrow E(x)\leq x\;\Rightarrow E(x)\leq x\prec x+1$

$\Rightarrow E(x)\prec x+1$

$\Rightarrow 0\prec x+1-E(x)\Rightarrow x+1-E(x)\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

Methode2 : $\forall x\in\mathbb{R}$; On a : $x-1\prec E(x)\leq x\Rightarrow -x\leq -E(x)\prec -x+1$

$\Rightarrow -x+x+1\leq x+1-E(x)\prec -x+1+x+1\Rightarrow 1\leq x+1-E(x)\prec 2\Rightarrow 1\leq x+1-E(x)\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$ et $x-1\in\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=\dfrac{x+1-E(x+1)}{x+1+1-E(x+1)}=\dfrac{x+1-E(x)-1}{x+1+1-E(x)-1}=\dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)}=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

PROF: ATMANI NAJIB

3) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur : $I=[0;1[$

Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle $I=[0;1[$:

$x\in[0;1[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 1$ Donc : $E(x)=0$

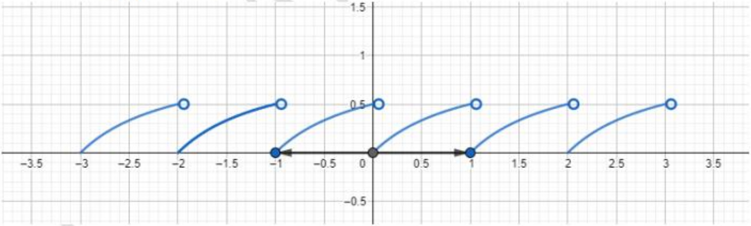
Donc : $f(x)=\dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)}=\dfrac{x-0}{x+1-0}=\dfrac{x}{x+1}$

Donc : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ si $x\in[0;1[$

4) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3[\cap D_f$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$

On a : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ si $x\in[0;1[$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

ATMANI NAJ