1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°3 : Généralités sur les fonctions

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice1 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$

Si on sait que : $f(-7)=7$ calculer : $f(7)$

Solution : On a : $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$

Donc : $f(-x)=a(-x)^7+b(-x)^3+c(-x)-5$

Donc : $f(-x)=-ax^7-bx^3-cx-5$

Donc : $f(x)+f(-x)=-10$

Donc : $f(-7)+f(7)=-10$ et comme : $f(-7)=7$

Donc : $f(7)=-10-f(-7)=-10-7=\boxed{-17}$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{-x+8}{4x^2-9}$ 2) $f(x)=\frac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$ 3) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

4) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+6}{x^2-4x-96}}$ 5) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$ 6) $f(x)=\frac{2\sin 3x-\cos x}{2\sin x-\sqrt{2}}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{-x+8}{4x^2-9}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2-9\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2\neq 9\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2\neq\frac{9}{4}\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq-\sqrt{\frac{9}{4}}\ et\ x\neq\sqrt{\frac{9}{4}}\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq-\frac{3}{2}\ et\ x\neq\frac{3}{2}\right\}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

2) $f(x)=\frac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x^2-2x+3|-2\neq 0\}$

$|x^2-2x+3|-2=0$ Signifie que : $|x^2-2x+3|=2$

Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

- Résolution de $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

• Résolution de $x^2-2x+3=-2$.

$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=-16$.

Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle

Au final, seule solution : $x=1$

D'où : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 1\}=\mathbb{R}-\{1\}$

3) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3x+1\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $a=2$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

4) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+6}{x^2-4x-96}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / \frac{2x+6}{x^2-4x-96}\geq 0 \text{ et } x^2-4x-96\neq 0\right\}$

On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2+4x+96$:

Le discriminant de $-x^2+4x+96$ est $\Delta=4^2-4\times 96\times(-1)=400$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-4+\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4+20}{-2}=\frac{16}{-2}=-8$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4-20}{-2\times 1}=\frac{-24}{-2}=12$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$		-8		-3		12		$+\infty$
$2x+6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+4x+96$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $D_f=]-\infty;-8[\cup[-3;12[$.

5) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / |x+1|-1\geq 0\}$

$|x+1|-1\geq 0$ Signifie que : $|x+1|\geq 1$ Signifie que : $x+1\geq 1$ ou $x+1\leq -1$

PROF: ATMANI NAJIB

Signifie que : $x \geq 0$ ou $x \leq -2$

Donc : $D_f =]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{2\sin 3x - \cos x}{2\sin x - \sqrt{2}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 2\sin x - \sqrt{2} \neq 0\right\}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2\sin x - \sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\sin x \neq \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $x \neq \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ Avec : $k \in \mathbb{Z}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ Avec : $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi; \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice3 : Soit f la fonction numérique définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par : $f(x) = \sqrt{3\tan x - \sqrt{3}}$

Déterminer D_f

Solution : $x \in D_f \Leftrightarrow x \in [-\pi\,;\pi]$ et $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \in [-\pi\,;\pi]$ alors : $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $x \neq -\dfrac{\pi}{2}$

- Résolution de l'équation : $3\tan x - \sqrt{3} = 0$

On a $3\tan x - \sqrt{3} = 0$ Équivaut à : $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

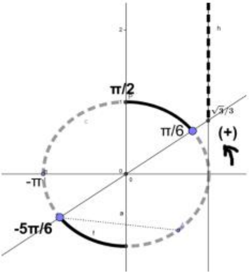
On sait que : $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [-\pi\,;\pi]$ alors : $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\tan x$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ dans $[-\pi\,;\pi]$



On trouve que : $\tan x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Équivaut à : $x \in \left[-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Donc : $D_f = \left[-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice4 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{x+2} & si \quad x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(4-x)} & si \quad x\succ 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Calculer : $f(2)$; $f(0)$; $f(-1)$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}^- / x+2\neq 0\}\cup\{x\in\mathbb{R}^{+*} / (x+1)(4-x)\neq 0\}$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}^- / x\neq -2\}\cup\{x\in\mathbb{R}^{+*} / x\neq -1 \text{ et } x\neq 4\}$

Donc : $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;0]\cup]0;4[\cup]4;+\infty[$

Par suite : $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;4[\cup]4;+\infty[$

2) Calcul de : $f(2)$: On a : $2\succ 0$

Donc : $f(2)=\dfrac{2^2}{(2+1)(4-2)}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Calcul de $f(0)$: On a : $0\leq 0$ donc : $f(0)=\dfrac{0-1}{0+2}=\dfrac{-1}{2}$

Calcul de $f(-1)$: On a : $-1\leq 0$

Donc : $f(-1)=\dfrac{-1-1}{-1+2}=\dfrac{-2}{1}=-2$

Exercice5 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$ 2) $g(x)=(2+x)^2-(2-x)^2$ 3) $h(x)=\sqrt{x-1}$ 4) $k(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$

Solution : 1) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ c'est-à-dire : $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

$f(-x)=f(x)$

Donc : f est une fonction paire

2) $g(x)=(2+x)^2-(2-x)^2$

a) On a : $D_g=\mathbb{R}$

b)

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $g(-x)=(2-x)^2-(2-(-x))^2$

$g(-x)=(2-x)^2-(2+x)^2$

$g(-x)=-\left(-(2-x)^2+(2+x)^2\right)$

$g(-x)=-\left((2+x)^2-(2-x)^2\right)$

Donc : $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tel que : $h(x)=\sqrt{x-1}$

$D_h=\{x\in E/h(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_h=\{x\in E/x-1\geq 0\}$

$D_h=\{x\in E/x\geq 1\}$

Par suite : $D_h=[1;+\infty[$

Par exemple on a : $2\in[1;+\infty[$ mais : $-2\notin[1;+\infty[$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) $k(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$. $D_k=\{x\in\mathbb{R}/1-\cos x\neq 0\}$

$1-\cos x=0$ Signifie $\cos x=1$

C'est-à-dire : $x=0+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_k=\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

☞ $k(-x)=\dfrac{2\sin(-x)}{1-\cos(-x)}=\dfrac{-2\sin x}{1-\cos x}=-\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}=-g(x)$ Car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc k est une fonction impaire

Exercice6 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=-3x+2 & si\ x\in]-\infty;-1[\\ f(x)=x^2-2|x| & si\ x\in[-1,1] \\ f(x)=3x+2 & si\ x\in]1;+\infty[\end{cases}$

1) Déterminer une définition plus simplifiée de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1)

☞Si : $x\in]-\infty;-1[$ alors : $f(x)=-3x+2$ et $|x|=-x$

Donc : $f(x)=3|x|+2$

☞Si : $x\in]1;+\infty[$ alors : $f(x)=3x+2$ et $|x|=x$

Donc : $f(x)=3|x|+2$

Par suite si : $|x|>1$ alors : $f(x)=3|x|+2$

☞Si : $x\in[-1,1]$ alors : $f(x)=x^2-2|x|$

Conclusion : $\begin{cases} f(x)=3|x|+2 & si\ |x|>1 \\ f(x)=x^2-2|x| & si\ |x|\leq 1 \end{cases}$

2)☞ Si : $|x|\leq 1$ alors : $|-x|\leq 1$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : $f(-x)=(-x)^2-2|-x| =x^2-2|x|=f(x)$

☞→Si : $|x|>1$ alors : $|-x|>1$

Donc : $f(-x)=3|-x|+2 \; =3|x|+2=f(x)$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\;\; f(-x)=f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Alors : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

C'est-à-dire : le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

Exercice7 : Soient les fonctions :

$f:\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1+x$; $g:\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$; $h:\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -1+\sqrt{4+2x-x^2}$ et $k:\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1-\sqrt{-2x-x^2}$

Comparer les fonctions f ; g ; h et k

Solution : On a : $D_f=D_g=D_h=D_k=\{-1;0\}$

Et On a : $f(-1)=g(-1)=h(-1)=k(-1)=0$ et $f(0)=g(0)=h(0)=k(0)=1$

Donc : $f=g=h=k$

Exercice8 : Soit f et g les fonctions numériques tel que : $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g .

Solution : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

et $f(x)-g(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$ Etudions le signe de : $\dfrac{x^2-1}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Si : $x\in]-\infty;-1]\cup]0;1]$ alors $f(x)-g(x)\le 0$

Par suite : $f(x)\le g(x)$ c'est-à-dire : $f\le g$

Si : $x\in[-1;0[\cup[1;+\infty[$ alors $f(x)-g(x)\ge 0$

Et par suite : $f(x)\ge g(x)$ c'est-à-dire : $f\ge g$

Exercice9 : 1) Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que : $f(x)=|x-2|+|x+2|$

2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f et déterminer les extremums de f

Solution :

PROF: ATMANI NAJIB

- On a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$

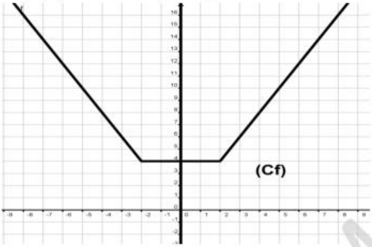
$x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$		$x-2$
$x+2$	$-$	0	$+$	0	$+$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$		$x+2$	0	$x+2$
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert$	$-2x$		4		$2x$

Donc : $\rightarrow f(x)=-2x$ si $x \in]-\infty,-2]$

$\rightarrow f(x)=4$ si $x \in [-2,2]$

$\rightarrow f(x)=2x$ si $x \in [2,+\infty[$



2) $\rightarrow$Si : $x \in]-\infty,-2]$: $f(x)=-2x$

Soient $x_1 \in]-\infty,-2]$ et $x_2 \in]-\infty,-2]$ tel que : $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Donc : f strictement décroissante sur : $]-\infty,-2]$

$\rightarrow$Si : $x \in [-2,2]$: $f(x)=4$

$\forall x \in [-2,2]$; $f(x)=4$

Donc : f strictement constante sur : $[-2,2]$

$\rightarrow$Si : $x \in [2,+\infty[$: $f(x)=2x$

Soient $x_1 \in [2,+\infty[$ et $x_2 \in [2,+\infty[$ tel que : $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Donc : f strictement croissante sur : $[2,+\infty[$

Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f(x)$	↘	4	→	4	↗

PROF: ATMANI NAJIB

D'après le tableau de variations de f : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq f(2)$ et $f(x) \geq f(-2)$

Donc : 4 est la valeur minimale de f

Exercice10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1)Préciser le domaine de définition de f

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3)Etudier la monotonie de f sur : $I = [-1;+\infty[$ et sur $J =]-\infty;-1]$

4)Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ On a : $f(x) \leq 2$

b) En déduire que : pour tout $x \in \left[-1;\frac{1}{2}\right]$ On a : $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

c) En déduire que : pour tout $x \in [-3;-1]$ On a : $-2 \leq f(x) \leq 2$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = -x - 1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x) < f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2 - 2x + m - 1 = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2)Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-x_2^2 - 2x_2 + 1) - (-x_1^2 - 2x_1 + 1)}{x_2 - x_1} = \frac{-x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_1^2 + 2x_1 - 1}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{-x_2^2 + x_1^2 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{-(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(-(x_2 + x_1) - 2)}{x_2 - x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2) = -(x_1 + x_2) - 2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I = [-1;+\infty[$

Soient : $x_1 \in [-1;+\infty[$ et $x_2 \in [-1;+\infty[$ alors $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ implique $x_1 + x_2 \geq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \leq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \leq 0$

Donc $T(x_1;x_2) \leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I = [-1;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty;-1]$

Soient : $x_1 \in]-\infty;-1]$ et $x_2 \in]-\infty;-1]$ alors : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ cela implique $x_1 + x_2 \leq -2$

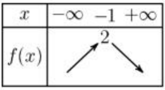
Donc $-(x_1+x_2) \geq 2$ par suite : $-(x_1+x_2)-2 \geq 0$

Donc $T(x_1;x_2) \geq 0$

D'où : f est croissante sur $J =]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1)+1 = -1+2+1 = 2$

Donc :


x
$-\infty$
-1
$+\infty$
$f(x)$
2

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1) = 2$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq f(-1)$

Par suite : $f(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Soit : $x \in \left[-1;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I = [-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(-1)$ et comme : $f(-1) = 2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}+1 = -\frac{1}{4}-1+1 = -\frac{1}{4}$

Par suite : $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

b) Soit : $x \in [-3;-1]$ On a alors : $-3 \leq x \leq -1$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J =]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-3;-1]$

Alors : $f(-3) \leq f(x) \leq f(-1)$ et comme :

$f(-3) = -(-3)^2 - 2\times(-3)+1 = -9+6+1 = -2$ Et $f(-1) = 2$

Par suite : $-2 \leq f(x) \leq 2$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l´´équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $-x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 1 = 4+4 = 8 > 0$

PROF: ATMANI NAJIB

$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -1-\sqrt{2}$ **et** $x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1+\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A\left(-1-\sqrt{2};0\right)$ et $B\left(-1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

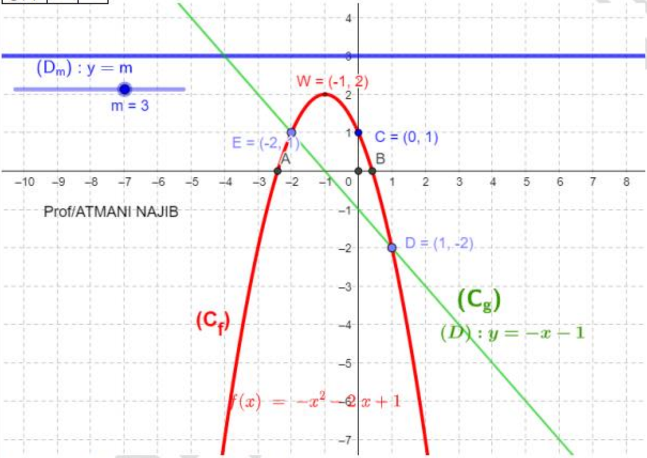
Et on a $f(0) = -0^2 - 2\times 0 + 1 = 1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-7	-2	1	2	1	-2	-7

x	-2	1
g(x)	1	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 1$ donc $S = \{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 - 2x + 1 = -x - 1$ c'est-à-dire : $-x^2 - x + 2 = 0$ c'est-à-dire : $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 1+8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $S = \{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) \geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) \geq f(x)$:

$g(x) \geq f(x)$ Signifie $-x-1 \geq -x^2 - 2x + 1$

C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 \geq 0$

Les racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2 - 2x + 1 - m = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

$-x^2 - 2x + 1 - m = 0$ Signifie $m = -x^2 - 2x + 1$

Signifie : $m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m > 2$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m = 2$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m < 2$ il y'a deux solutions

Exercice11 : Soit la fonction définie sur $[-3;3]$

La représentions graphique suivante est la représentions de f sur l'intervalle : $[0;3]$

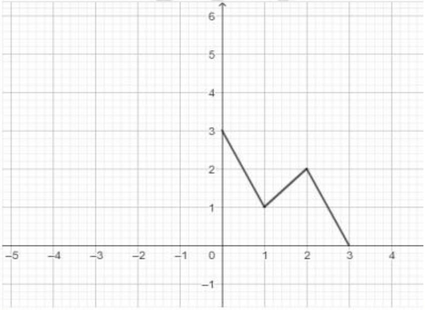
1) Dresser son tableau de variation sur l'intervalle : $[0;3]$

2) Sachant que f est une fonction paire

a) Compléter la représentions graphique de f sur l'intervalle : $[-3;3]$

b) Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-3;3]$ et $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ par la fonction f

ATMANI NAJIB

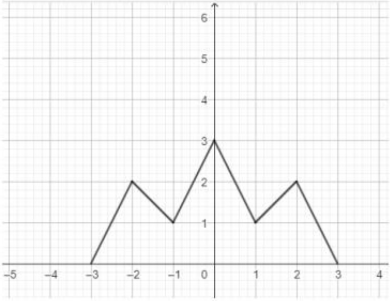


Solution : 1) Le tableau de variation sur l'intervalle : $[0;3]$

x	0		1		2		3
Variations de $f(x)$	3	↘	1	↗	2	↘	0

2) Puisque que f est une fonction paire

Alors : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)



b) Graphiquement on a : $f([-3;3])=[0;3]$ et $f\left(\left[1;\frac{5}{2}\right]\right)=[1;2]$

Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Vérifier que f est périodique et 2π est une période de f

3) En déduire un domaine d'étude de f : D_E

ATMANI NAJIB

Solution : 1) →Déterminons D_f et étudions la parité de f

$$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}$$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x+1\neq 0\}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ 2\cos x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \cos x\neq -\frac{1}{2}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \cos x\neq \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ x\neq -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

→Etudions la parité de f

☺$x\in D_f \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ x\neq-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ et\ \ x\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\ et\ -x\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ et\ -x\neq-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow -x\in D_f$

☺$f(-x)=\frac{\sin(-x)\cos(-x)}{2\cos(-x)+1}=-\frac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}=-f(x)$

Donc : f une fonction impaire

2) Vérifions que f est périodique et 2π est une période de f

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)}{2\cos(x+2\pi)+1}=\frac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}=f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et 2π est une période de f

3) Déduisons un domaine d'étude de f : D_E

Comme : f une fonction périodique et 2π est une période de f et paire on choisit un intervalle d'étude : $D_E=[0,\pi]\cap D_f=\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

Exercice13 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=1$

Tel que : $f(x)=x\quad\forall x\in[0;1[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $I=[-5;5[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

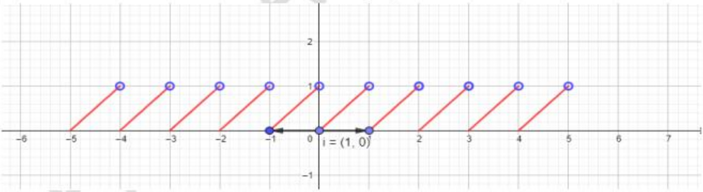
2) Calculer : $f(6,1)$; $f(-10,5)$; $f(2025,12)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[\ \ k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;1[$:On a : f est une fonction linéaire

Donc la courbe (C_f) c'est une portion de droite.

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I=[-5;5[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) $\rightarrow f(6.1)=f(6+0.1)=f(6\times1+0.1)=f(0.1)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(6,1)=f(0,1)$ et puisque : $0,1\in[0;1[$

Alors : $f(6,1)=f(0,1)=0,1$

$\rightarrow f(-10,5)=f(-11+0,5)=f(-11\times1+0,5)=f(0,5)$ car f est périodique de période $T=1$;

Donc : $f(-10,5)=f(11-0,5)=f(11\times1+0,5)=f(0,5)=0,5$ car : $0,5\in[0;1[$

$\rightarrow f(2025,12)=f(2025+0,12)=f(2025\times1+0,12)=f(0,12)$ car f est périodique de période $T=1$;

Donc : $f(2025,12)=f(0,12)=1,12$ car : $0,12\in[0;1[$

3) L'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[k;k+1[\Leftrightarrow k\le x\prec k+1$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\le x-k\prec 1\Leftrightarrow f(x-k)=x-k$

Or : f est périodique de période $T=1$ alors : $f(x-k)=f(x-k\times1)=f(x)$

Donc : $f(x)=x-k$ si $x\in[k;k+1[\ k\in\mathbb{Z}$

Exercice14 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

1) Etudier la parité de f

2) Étudier les variations de f sur $I=[0,1]$ et sur $J=[1;+\infty[$

3) En déduire les variations de f sur D_f

4) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

5) Déduire que f est bornée sur D_f

Solution : 1) On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à : $x^2+1\neq0$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ Impossible

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f(x)$

ATMANI NAJIB

Donc f est une fonction impaire,

2) Soient : x_1 et x_2 deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_1-x_2-x_1\times x_2(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1\times x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1\times x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}\times\dfrac{1}{x_1-x_2}=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

a) Sur $I=[0,1]$

Soit $x_1\in[0,1]$ et $x_2\in[0,1]$ et $x_1\neq x_2$

Donc : $0\le x_1\le 1$ et $0\le x_2\le 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $0\le x_1x_2<1$ car $x_1\neq x_2$

Donc $1-x_1\times x_2>0$ par suite : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}>0$ car $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

D'où : f est strictement croissante sur $I=[0,1]$

b) Sur $J=[1;+\infty[$: Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$.

Donc $x_1\ge 1$ et $x_2\ge 1$ Donc $x_1x_2\ge 1$ et $x_1\neq x_2$

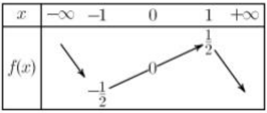
Donc $1-x_1\times x_2<0$ par suite : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}<0$ car $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=[0,1]$ est l'intervalle $I'=[-1,0]$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Puisque : f est strictement croissante sur I alors f est strictement croissante sur I'
Puisque : f est strictement décroissante sur J alors f est strictement décroissante sur J'

4) Par suite le tableau de variations de f sur D_f est :


x
$-\infty$
-1
0
1
$+\infty$
$f(x)$
$\frac{1}{2}$
0
$-\frac{1}{2}$

$f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$; $f(-1)=-f(1)=-\dfrac{1}{2}$

5)D'après le tableau de variations de f: en déduit que :

$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$ et $f(1)=\dfrac{1}{2}$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-1)\le f(x)\le f(1)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite f est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice15 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.
3) Démontrer que f est majorée par 2 .Conclure

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+2x+2\neq 0\right\}$

$\Delta=4-8=-4<0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-1=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\frac{2x^2+4x+3-1\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$$

Donc : $f(x)-1=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}$ Or $x^2+2x+2>0$ car $\Delta=-4<0$(signe de a=1)

Et on a : $(x+1)^2\geq 0$ donc $f(x)\geq 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite f est minorée sur $\mathbb{R}$ par : $m=1$

2) Soit $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)-2=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2=\dfrac{-1}{x^2+2x+2}<0$

Donc : $f(x)<2\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite f est majorée par 2 .

Conclusion : $1\leq f(x)<2\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice16 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1) Etudier le signe de f

2) a) Démontrer que f est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Est ce que $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution :1) Soit $x\in\,]1;+\infty[$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$$

Donc $f(x)\succ 0$ si $x\in\,]1;+\infty[$

2) a) $x\in\,]1;+\infty[$ Montrons que $f(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x\in\,]1;+\infty[$ donc $x\succ 1$ cad $x+1\succ 2$

Donc : $\sqrt{x+1}\succ\sqrt{2}$ alors : $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\succ 2\sqrt{2}$

PROF: ATMANI
ATMANI NAJIB

Donc : $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} \prec \frac{1}{2\sqrt{2}}$ c'est-à-dire : $f(x) \prec \frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x \in]1;+\infty[$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

Conclusion : $2 \prec f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(0)=3$ donc $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) Puisque $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x \in]1;+\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exercice17 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

Démontrer que : -4 est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^+$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

Soit $x\in\mathbb{R}^+ : f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2-4$

Donc : $f(x)=(x+\sqrt{x})^2-4$ et donc : $f(x)+4=(x+\sqrt{x})^2\geq 0$

Donc : $f(x)+4\geq 0$ par suite : $f(x)\geq -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

Donc : $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

Exercice18 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x$

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

1) a) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

b) Est ce que f admet une valeur maximale ?

2) Démontrer que f est non minorée

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x)=-x^2+x=-(x^2-x)=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

On a : $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$ donc $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $f(x)\leq\frac{1}{4} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=\frac{1}{4}$

b) On a : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ donc : $f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : f admet une valeur maximale c'est : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

2) Démontrons que f est non minorée.

Supposons f minorée donc : $\exists m\in\mathbb{R} : m\le f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} : m\le -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}-m$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} : \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\le\sqrt{\frac{1}{4}-m}$ (On peut toujours supposer $\frac{1}{4}\ge m$)

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} : \left|x-\frac{1}{2}\right|\le\sqrt{\frac{1}{4}-m}$

Donc on a : $-\sqrt{\frac{1}{4}-m}\le x-\frac{1}{2}\le\sqrt{\frac{1}{4}-m}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-m}\le x\le\sqrt{\frac{1}{4}-m}+\frac{1}{2}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ absurde car on prend par exemple :

$x=\sqrt{\frac{1}{4}-m}+2026$ et $x>\sqrt{\frac{1}{4}-m}+\frac{1}{2}$ Donc f est non minorée

Exercice19: Etudier les variations des fonctions définies par :

1) $f(x)=-5x^3+2021$ 2) $h(x)=-\frac{\sqrt{2}}{x}$

Solution : 1) $f(x)=-5x^3+2021$ et $D_f=\mathbb{R}$

On a : $f=-5g+2021$

Puisque la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $-5g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $-5g+2021$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	↘

2) $h(x)=-\frac{\sqrt{2}}{x}$ et $D_h=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v : x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $h=-\sqrt{2}v$

Alors : h est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-\sqrt{2}<0$

Exercice20 : Soit les fonctions f et g définies par : $g(x)=\frac{x}{x+2}$ et $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h

2) Déterminer : $h(x)$

3) Soit la fonctions k définie par : $k(x)=\frac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\}$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq -1\ et\ \ f(x)\neq -2\}$$

$$f(x)=-2\Leftrightarrow\frac{x+3}{x+1}=-2\Leftrightarrow -2(x+1)=x+3\Leftrightarrow -3x=5\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3};-1\right\}$

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$$

$$h(x)=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1}+2}=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3+2x+2}{x+1}}=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{3x+5}{x+1}}=\frac{x+3}{3x+5}$$

Donc : $h(x)=\frac{x+3}{3x+5}$

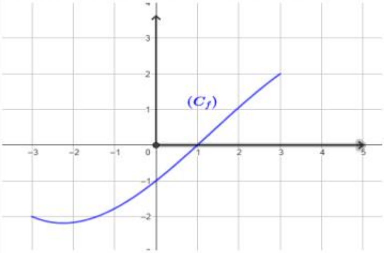
3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3};-1\right\}$ et $D_k=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

Exercice21 : Soit si dessous :(C_f) La courbe représentative d'une fonction f

Et Soit g une fonction définie par : $g(x-5)=x$

Déterminer x si on sait que : $(f\circ g\circ f)(2x)=2$



Solution : Déterminons x si on sait que : $(f\circ g\circ f)(2x)=2$

$(f\circ g\circ f)(2x)=2\Leftrightarrow f(g(f(2x)))=2\Leftrightarrow g(f(2x))=3$ car $f(3)=2$

Puisque : $g(x-5)=x$ alors : $g(x)=x+5$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $g\left(f(2x)\right) = f(2x)+5$

$(f\circ g\circ f)(2x) = 2 \Leftrightarrow f(2x)+5 = 3 \Leftrightarrow f(2x) = -2 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-3}{2}}$

Exercice22 : Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2-2x-3$ et $g(x) = -\frac{x+1}{x-1}$

(C_f) ; (C_g) Les courbes représentatives de f et g.

1) Donner le tableau de variations de f et g

2) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;0)$ et $B(2;-3)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3)Soit h la fonction définie sur $[-1;3]$ par : $h(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}$

a) Vérifier que : $h(x) = (g\circ f)(x) \quad \forall x \in [-1;3]$

b) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $[-1;1]$; $[1;3]$ puis dresser le tableau de variations

de h sur : $[-1;3]$

Solution : 1) a) $g(x) = -\frac{x+1}{x-1}$; on a $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Donc : $D_g = \mathbb{R}-\{1\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives :

$x=1$ et $y=-1$.

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

b) $f(x) = x^2-2x-3$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=-3$ $\left(f(x) = ax^2+bx+c\right)$: $\alpha = -\frac{-2}{2\times1} = 1$ et $\beta = g(\alpha) = f(1) = 1^2-2\times1-3 = -4$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W'(1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Donc le tableau de variations de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗

2) a) Vérifions que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;0)$ et $B(2;-3)$

PROF:ATMANI NAJIB

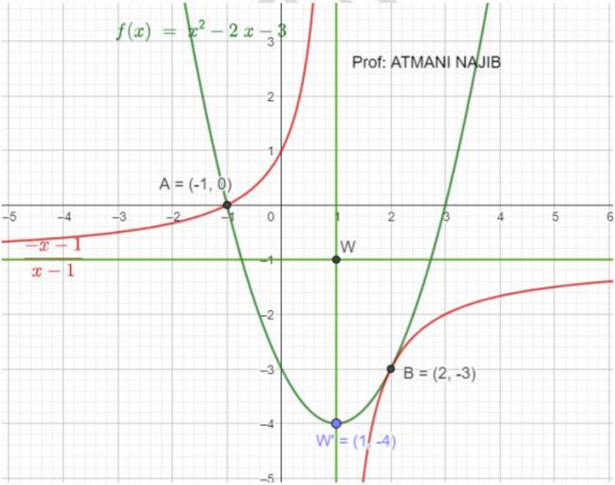
$f(-1)=0$ donc : $A(-1;0)\in(C_f)$ et $g(-1)=0$ donc : $A(-1;0)\in(C_g)$

Donc : $A(0;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=-3$ donc : $B(2;-3)\in(C_f)$ et $g(2)=-3$ donc : $B(2;-3)\in(C_g)$

Donc : $B(2;-3)\in(C_f)\cap(C_g)$

b) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



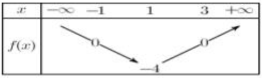
3)Soit h la fonction définie sur $[-1;3]$ par : $h(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}$

a) Vérifions que : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in[-1;3]$

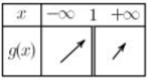
Soit : $x\in[-1;3]$; $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}=\dfrac{-x^2+2x+3-1}{x^2-2x-3-1}=\dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}=h(x)$

Donc : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in[-1;3]$

b) → Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[-1;1]$



x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	-4	0	↗



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

Puisque f est décroissante sur $[-1;1]$ et $f([-1;1])=[-4;0]$ et g est croissante sur $[-4;0]$ alors

ATMANI NAJIB

$h = g \circ f$ est décroissante sur $[-1;1]$

→ Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[1;3]$

Puisque f est croissante sur $[1;3]$ et $f([1;3]) = [-4;0]$ et g est croissante sur $[-4;0]$ alors $h = g \circ f$ est croissante sur $[1;3]$

→Le tableau de variations de h sur $[-1;3]$:

x	-1		1		3
$h(x)$	$\frac{1}{4}$	↘	$-\frac{3}{5}$	↗	$\frac{1}{3}$

Exercice23 : Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = x + 3 - 2\sqrt{x+1}$

a) Vérifier que : $h(x) = (f \circ g)(x)$; $\forall x \in [0;+\infty[$

b) En déduire les variations de h sur $[0;+\infty[$

c) Soit : $a \in [1;+\infty[$; Montrer que : $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}$

Solution : 1) $\rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2$; $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 1 > 0$; $b = -2$ et $c = 2$ $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a} = 1$ et $(f(1) = 1)$

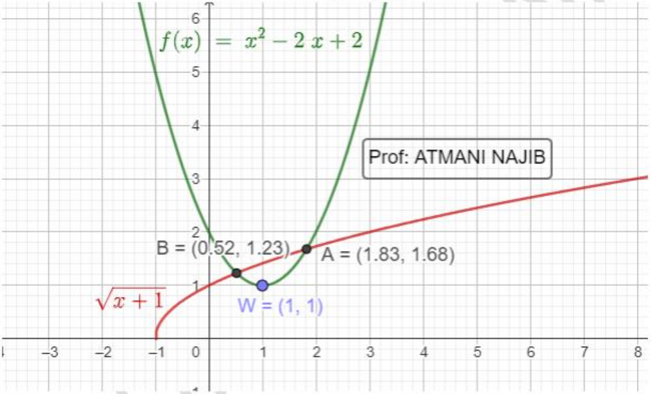
Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

$\rightarrow g(x) = \sqrt{x+1}$; $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} = [-1;+\infty[$

x	-1		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	

2) Traçage des courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère



3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = x+3-2\sqrt{x+1}$

a) Vérifions que : $h(x) = (f \circ g)(x)$; $\forall x \in [0;+\infty[$

Soit : $x \in [0;+\infty[$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - 2g(x) + 2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2\sqrt{x+1} + 2 = x+1-2\sqrt{x+1}+2 = x+3-2\sqrt{x+1} = h(x)$

b) Déduisons les variations de h sur $[0;+\infty[$

Puisque g est croissante sur $[0;+\infty[$ et $g([0;+\infty[) \subset [1;+\infty[$ et f est décroissante sur $[1;+\infty[$ alors h est croissante sur $[0;+\infty[$

c) Soit : $a \in [1;+\infty[$; Montrons que : $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} \le \frac{1}{2}$

Puisque : h est croissante sur $[0;+\infty[$

$a \in [1;+\infty[\Rightarrow a \ge 1 \Rightarrow a-1 \ge 0$

On : $a-1 \le a$ et puisque : h est croissante sur $[0;+\infty[$

Alors : $h(a-1) \le h(a)$

Alors : $a-1+3-2\sqrt{a-1+1} \le a+3-2\sqrt{a+1}$

Alors : $a-2\sqrt{a}+2 \le a+3-2\sqrt{a+1}$

Alors : $-2\sqrt{a} \le 1-2\sqrt{a+1}$

Alors : $2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right) \le 1$ Alors : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a} \le \frac{1}{2}$

Exercice 18: Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = (x-E(x))(E(x)-x+2)$

1) Calculer : $f\left(\frac{2023}{2}\right)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=x$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\leq 2x+1$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

4) Simplifier l'expression de : $f(x)$ sur l'intervalles : $I_1=[0;1[$

5)Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre dans $[-3;3]$ les équations suivantes : a) $f(x)=0$ b) $f(x)=1$ c) $2f(x)=3$

Solution : 1) $f\left(\frac{2023}{2}\right)=\left(\frac{2023}{2}-E\left(\frac{2023}{2}\right)\right)\left(E\left(\frac{2023}{2}\right)-\frac{2023}{2}+2\right)$

On a : $E\left(\frac{2023}{2}\right)=E\left(\frac{2022+1}{2}\right)=E\left(\frac{2022}{2}+\frac{1}{2}\right)=E\left(1011+\frac{1}{2}\right)=1011+E\left(\frac{1}{2}\right)=1011+0=1011$

$f\left(\frac{2023}{2}\right)=\left(\frac{2023}{2}-1011\right)\left(1011-\frac{2023}{2}+2\right)=\left(\frac{2023-2022}{2}\right)\left(\frac{2026-2023}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : (E) $f(x)=x$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Remarque : on peut procéder par équivalence : $x\in S\Leftrightarrow x\in\{...\}$ et donc : $S=\{...\}$

Mais ici on procéder par double implication ☹ (analyse puis synthèse)

$\Rightarrow)$ Analyse :

$x\in S\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow$ (......on va encadrer $f(x)$)

$\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1\Leftrightarrow 0\leq x-E(x)\prec 1$ ❶

$0\leq x-E(x)\prec 1\Rightarrow -1\prec -x+E(x)\leq 0\Rightarrow 1\prec E(x)-x+2\leq 2$ ❷

❶ ⊗ ❷ $\Rightarrow)$ $\boxed{0\leq f(x)\prec 2}$

$f(x)=x\Rightarrow 0\leq x\prec 2$

Disjonction des cas :

- ✓ Si : $0\leq x\prec 1$: $f(x)=x\Leftrightarrow (x-E(x))(E(x)-x+2)=x\Leftrightarrow (x-0)(0-x+2)=x$
  $\Leftrightarrow x(-x+2)=x\Leftrightarrow -x^2+2x=x\Leftrightarrow -x^2+x=0\Leftrightarrow x(-x+1)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ -x+1=0$
  $\Leftrightarrow x=0\ ou\ \cancel{x=1}$ car $1\notin[0;1[$

Donc : $S_1=\{0\}$

- ✓ Si : $1\leq x\prec 2$: $f(x)=x\Leftrightarrow (x-E(x))(E(x)-x+2)=x\Leftrightarrow (x-1)(1-x+2)=x$

PROF: ATMANI NAJIB

$\Leftrightarrow (x-1)(3-x)=x \Leftrightarrow 3x-x^2-3+x=x \Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ $\Delta=9-4\times3\prec0$ Pas de solution

Donc : $S_2=\varnothing$

Donc : $S\subset\{0\}$ (car $\Rightarrow$ seulement) fini donc : l'Analyse :

$\Leftarrow$) Synthèse : $\{0\}?\subset?S$

$f(0)=(0-E(0))(E(0)-0+2)=0(0+2)=0$

Donc : $f(0)=0$ par suite : $\{0\}\subset S$

Finalement : $S=\{0\}$

2) b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) $f(x)\leq 2x+1$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'inéquation (I)

$x\in S\Rightarrow f(x)\leq 2x+1\Rightarrow$ (……on va trouver un autre encadrement plus finn de $f(x)$)

On a : $0\leq x-E(x)\prec1\Rightarrow$ on pose : $y=x-E(x)$ donc : $0\leq y\prec1$

$y=x-E(x)\Rightarrow f(x)=y(-y+2)=-y^2+2y=-(y^2-2y)=-(y^2-2y+1-1)=-((y-1)^2-1)$

Donc : $f(x)=-(y-1)^2+1$

On a : $0\leq y\prec1$ donc : $-1\leq y-1\prec0$ donc : $0\prec(y-1)^2\leq1$ donc : $-1\leq-(y-1)^2\prec0$

Donc : $0\leq1-(y-1)^2\prec1$ par suite : $\boxed{0\leq f(x)\prec1}$ (bon encadrement)

$x\in S\Leftrightarrow f(x)\leq 2x+1$

✓ Si : $1\leq 2x+1$: alors : $f(x)\prec1\leq2x+1$ l'inéquation : (I) $f(x)\leq2x+1$ est toujours vérifier
$1\leq2x+1\Leftrightarrow0\leq2x\Leftrightarrow0\leq x$

Donc : $S_1=[0;+\infty[$

✓ Si : $2x+1\prec0\Leftrightarrow x\prec-\frac{1}{2}$: alors : $2x+1\prec0\leq f(x)$ c'est-à-dire : $2x+1\prec f(x)$

L'inéquation : (I) $f(x)\leq2x+1$ n'a pas de solutions

Donc : $S_2=\varnothing$

PROF. ATMANI NAJIB

✓ Si : $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right[$: alors : $f(x)\leq2x+1$ $\Leftrightarrow(x-E(x))(E(x)-x+2)\leq2x+1$

$\Leftrightarrow(x-(-1))((-1)-x+2)\leq2x+1$ car : $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right[\Rightarrow E(x)=-1$

$\Leftrightarrow(x+1)(-x+1)\leq2x+1$ $\Leftrightarrow1-x^2\leq2x+1$ $\Leftrightarrow0\leq x^2+2x$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_3=\left[-\frac{1}{2};0\right[\cap\left(\left]-\infty;-2\right]\cup\left[0;+\infty\right[\right)=\varnothing$

Finalement : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left[0;+\infty\right[\cup\varnothing\cup\varnothing=\left[0;+\infty\right[$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$ et $x-1\in\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=(x+1-E(x+1))(E(x+1)-x-1+2)=(x+1-E(x)-1)(E(x)+1-x-1+2)$

$=(x-E(x))(E(x)-x+2)=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

4) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :

$D_E=D_f\cap\left[0;1\right[=\mathbb{R}\cap\left[0;1\right[=\left[0;1\right[$

Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=\left[0;1\right[$:

$x\in\left[0;1\right[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 1$ Donc : $E(x)=0$

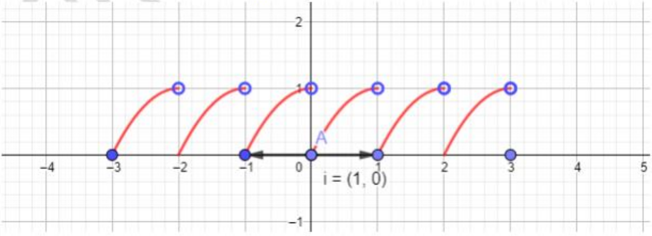
Donc : $f(x)=(x-E(x))(E(x)-x+2)=(x-0)(0-x+2)=x(2-x)$

$f(x)=-x^2+2x$ si $x\in\left[0;1\right[$

5) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_1=\left[0;1\right[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$

$f(x)=-x^2+2x$ $S\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ $\frac{-b}{2a}=1$ et $f(1)=1$ $S(1;1)$ le sommet du parabole



PROF: ATMANI NAJIB

6) a) Résolution dans $\left[-3;3\right]$ de l'équation : $f\left(x\right)=0$

$f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-E\left(x\right)\right)\left(E\left(x\right)-x+2\right)=0 \Leftrightarrow x-E\left(x\right)=0 \ ou \ \ E\left(x\right)-x+2=0$

Or on a : $0 \leq x-E\left(x\right) \prec 1 \Rightarrow -1 \prec -x+E\left(x\right) \leq 0 \Rightarrow 1 \prec -x+E\left(x\right)+1 \leq 2 \Rightarrow -x+E\left(x\right)+1 \neq 0$

$f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x-E\left(x\right)=0 \quad \Leftrightarrow E\left(x\right)=x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

D'où : $S=\mathbb{Z} \cap \left[-3;3\right]=\left\{-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}$

b) Résolution dans $\left[-3;3\right]$ de l'équation : $f\left(x\right)=1$:

On a déjà montré que : $\boxed{0 \leq f\left(x\right) \prec 1}$ donc : $f\left(x\right)=1$ na pas de solutions

D'où : $S=\varnothing$

Remarque : $f\left(x\right)=1$ na pas de solutions donc f non surjective

Et $f\left(0\right)=0=f\left(1\right)$ Donc f non injective

b) Résolution dans $\left[-3;3\right]$ de l'équation : $f\left(x\right)=1$:

On a déjà montré que : $\boxed{0 \leq f\left(x\right) \prec 1}$ donc : $f\left(x\right)=1$ na pas de solutions

D'où : $S=\varnothing$

c) $2f\left(x\right)=3 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{3}{3} \succ 1$ donc : $f\left(x\right)=1$ na pas de solutions car $0 \leq f\left(x\right) \prec 1$

D'où : $S=\varnothing$

Exercice 22: Soit f une fonction numérique définie par : $f\left(x\right)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E\left(x^2\right)}\right)$

1) Déterminer D_f

2) Donner une expression de : $f\left(x\right)$ sur l'intervalle : $I=\left]-1;1\right[$ et $J=\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

3) Tracer la représentation graphique de la fonction dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

4) Discuter graphiquement selon les valeurs de m le nombre de racines de l'équation : $f\left(x\right)=m$

Solution : 1) $D_f=?$

$D_f=\left\{x \in \mathbb{R} / 1-E\left(x^2\right) \neq 0\right\}$

$1-E\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow E\left(x^2\right)=1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \prec 1+1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \prec 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{x^2} \prec \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 \leq |x| \prec \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq |x| \ \ et \ \ |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x \leq -1 \ ou x \geq 1 \ \right) et \left(-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \ \right)$

$1-E\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right[$

$1-E\left(x^2\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right[$

$D_f=\mathbb{R}-\left(\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right[\right)=\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left]-1;1\right[\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

2)a) L'expression de $f\left(x\right)$ sur des l'intervalles :

PROF: ATMANI NAJIB

Si : $x \in]-1;1[\Leftrightarrow |x| \prec 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \prec 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \prec 0+1 \Leftrightarrow E(x^2)=0$

$$f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)=x^2+E\left(\frac{1}{1-0}\right)=x^2+E(1)=x^2+1$$

Si : $x \in \left]-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[\Leftrightarrow |x| \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 \ge \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow x^2 \ge \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow x^2 \ge 2$

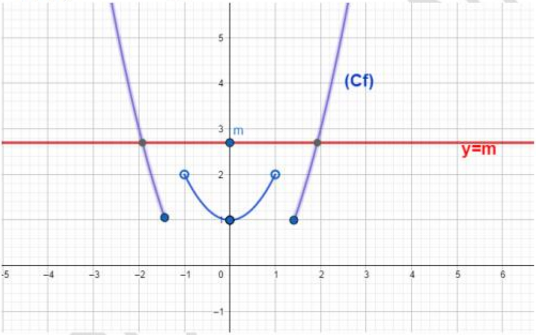
$x^2 \ge 2 \Rightarrow E(x^2) \ge E(2)$ car E est croissante

$$\Rightarrow E(x^2) \ge 2 \Rightarrow -E(x^2) \le -2 \Rightarrow 1-E(x^2) \le 1-2 \Rightarrow 1-E(x^2) \le -1 \prec 0 \Rightarrow -1 \le \frac{1}{1-E(x^2)} \prec 0$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)=-1 \Rightarrow x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)=x^2-1 \Rightarrow f(x)=x^2-1$$

Donc : $\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si \quad |x| \prec 1 \\ f(x)=x^2-1 & si \quad |x| \ge \sqrt{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si \quad |x| \prec 1 \\ f(x)=x^2-1 & si \quad |x| \ge \sqrt{2} \end{cases}$



4) Le nombre de racines de l'équation : $f(x)=m$ c'est le nombre de points d'intersections de la courbe avec la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m \ge 2$: 2 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si $m=1$: 3 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si: $1 \prec m \prec 2$: 4 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si $m \prec 1$: pas de racines pour l'équation : $f(x)=m$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF ATMANI NAJIB