1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°4 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1 : Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{1}{|x|+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) Calculer les images de : 0 ; 1 ; -1 et -2 par f.

2) Les nombres : 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 et 2 ont-ils des antécédents par f ? si oui, trouver ces antécédents

3) Montrer que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) $D_f=\{x\in E/f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E/|x|+1\neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $|x|+1$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Calculons les images de : 0 ; 1 ; -1 et -2 par f.

• $f(0)=\frac{1}{|0|+1}=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1$

Donc : l'image de 0 par f est : 1

• $f(1)=\frac{1}{|1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de 1 par f est : $\frac{1}{2}$

• $f(-1)=\frac{1}{|-1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de -1 par f est : $\frac{1}{2}$

Remarque : 1 et -1 ont les mêmes images par f car : $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}$

• $f(-2)=\frac{1}{|-2|+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

Donc : l'image de -2 par f est : $\frac{1}{3}$

2) a) Déterminons les antécédents de : 0 par f s'ils existent :

x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

PROF: ATMANI NAJIB

$f(x)=0$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=0$

Signifie que : $1=0$ (impossible)

Par suite : 0 n'admet pas d'antécédents par f

b) Déterminons les antécédents de : $\frac{1}{2}$ par f s'ils existent :

x Est l'antécédents de $\frac{1}{2}$ par f signifie que $\frac{1}{2}$ est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\frac{1}{2}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|+1=2$

Signifie que : $|x|=1$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-1$

Par suite : les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont : 1 et -1.

c) Déterminons les antécédents de : 1 par f s'ils existent :

x Est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=1$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=1$

Signifie que : $|x|+1=1$

Signifie que : $|x|=0$

Signifie que : $x=0$

Par suite :1 admet un unique antécédent par f c'est : 0

d) Déterminons les antécédents de : 2 par f s'ils existent :

x est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=2$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=2$

Signifie que : $|x|+1=\frac{1}{2}$

PROF. ATMANI NAJIB

Signifie que : $|x|=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ (impossible)

Par suite : 2 n'admet pas d'antécédents par f

3) Montrons que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

On a déjà vu que : $f(0)=1$

Il suffit de montrer que : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $|x|\geq 0$ donc : $|x|+1\geq 1$ donc : $\frac{1}{|x|+1}\leq 1$

Donc : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Par suite : $f(0)=1$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^3-5x}$ 2) $f(x)=\frac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$ 3) $f(x)=\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}$

4) $f(x)=\frac{2x^2-2}{(3|x-5|-2|4-3x|)\sqrt{x+1}}$ 5) $f(x)=\sqrt{3-|-x+1|}$ 6) $f(x)=\sqrt{\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}}$ 7) $f(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x+1}$. 8) $f(x)=\frac{1}{2025\cos x-2026}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^3-5x}$

$x^3-5x=0$ Équivalent à : $x(x^2-5)=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-5=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2=5$ Équivalent à : $x=0$ ou $x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\}$

2) $f(x)=\frac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x+2|+1\neq 0\}$

$|x+2|+1=0$ Signifie que : $|x+2|=-1$ pas de solutions Car $|x+2|\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x-2\neq 0 \text{ et } 2x^2+13x+6\neq 0\}$

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est :$\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

PROF : ATMANI NAJIB

$x_1' = \frac{-13-\sqrt{121}}{2\times 2} = -6$ et $x_2' = \frac{-13+\sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-6 ; -\frac{1}{2} ; 2\right\}$

4) $f(x) = \frac{2x^2-2}{\left(3|x-5|-2|4-3x|\right)\sqrt{x+1}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 3|x-5|-2|4-3x| \neq 0 \ et \ x+1>0\right\}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 3|x-5|-2|4-3x| \neq 0 \ et \ x>-1\right\}$

$3|x-5|-2|4-3x|=0$ Signifie que : $3|x-5| = 2|4-3x|$

Signifie que : $|3x-15| = |8-6x|$

Signifie que : $3x-15 = 8-6x$ ou $3x-15 = -(8-6x)$

Signifie que : $9x = 23$ ou $-3x = 7$

Signifie que : $x = \frac{23}{9}$ ou $x = -\frac{7}{3}$

Donc : $D_f =]-1;+\infty[- \left\{-\frac{7}{3};\frac{23}{9}\right\} = \left]-1;\frac{23}{9}\right[\cup \left]\frac{23}{9};+\infty\right[$

5) $f(x) = \sqrt{3-|-x+1|}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 3-|-x+1| \geq 0\right\}$

$3-|-x+1| \geq 0$ Signifie que : $|-x+1| \leq 3$ Signifie que : $-3 \leq -x+1 \leq 3$

Signifie que : $-3-1 \leq -x+1-1 \leq 3-1$

Signifie que : $-4 \leq -x \leq 2$

Signifie que : $-2 \leq x \leq 4$

Donc : $D_f = [-2;4]$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{5\left(7x+5-6x^2\right)}{-3(1-x)^2}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{5\left(7x+5-6x^2\right)}{-3(1-x)^2} \geq 0\right\}$

Pour déterminer le signe du trinôme : $7x+5-6x^2$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=7$; $c=5$

Donc : $\Delta = b^2-4\times a\times c = 7^2-4\times(-6)\times 5 = 49+120 = 169 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-7-\sqrt{169}}{2a} = \frac{-7-13}{2\times(-6)} = \frac{5}{3}$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{169}}{2a} = \frac{-7+13}{2\times(-6)} = -\frac{1}{2}$

$-3(1-x)^2 \leq 0$ Car un carré est toujours positif ou nul.

$-3(1-x)^2 = 0$ Signifie que : $1-x=0$ Signifie que : $x=1$

PROF: ATMANI NAJIB

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$7x+5-6x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-3(1-x)^2$		$-$		$-$	0	$-$		$-$	
$\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par suite : $D_f = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$

7) $f(x) = \frac{2\cos x}{2\sin x + 1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2\sin x + 1 \neq 0\}$

$2\sin x + 1 = 0$ Signifie $\sin x = -\frac{1}{2}$

Signifie que : $\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donc: $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Signifie $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Signifie $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

8) $f(x) = \frac{1}{2025\cos x - 2026}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2025\cos x - 2026 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\cos x \neq \frac{2026}{2025} > 1$ Toujours vraie

Car : $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

Exercice 3 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x+2}} & si \quad x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{2x-1} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Déterminer D_f

Solution : *Remarque :* $\begin{cases} f(x) = f_1(x) & si \quad x \in I_1 \\ f(x) = f_2(x) & si \quad x \in I_2 \end{cases}$

$D_f = (D_{f_1} \cap I_1) \cup (D_{f_2} \cap I_2)$

On pose : $f_1(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x+2}}$ et $I_1 =]-\infty; 1]$ et $f_2(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ et $I_2 =]1; +\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

$D_{f_1} = \left]-2;+\infty\right[$ et $D_{f_2} = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$D_{f_1} \cap I_1 = \left]-2;1\right]$ et $D_{f_2} \cap I_2 = \left]1;+\infty\right]$

Donc : $D_f = \left]-2;1\right] \cup \left]1;+\infty\right]$

Donc : $D_f = \left]-2;+\infty\right[$

Exercice 4 : Soient les deux fonctions : $f(x) = \frac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x) = \frac{1-4x}{1-2x}$

1) Comparer les fonctions f et g

2) En déduire les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

3) En déduire une comparaison des nombres : $A = \frac{1{,}0000002}{1{,}0000004}$ et $B = \frac{0{,}9999996}{0{,}9999998}$

Solution : 1) $\rightarrow x \in D_f \Leftrightarrow 1+4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{4}$; Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

$x \in D_g \Leftrightarrow 1-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$; Donc : $D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

On peut dire que : $f \neq g$ car : $D_f \neq D_g$

$$\rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1+2x}{1+4x} - \frac{1-4x}{1-2x} = \frac{(1+2x)(1-2x)-(1+4x)(1-4x)}{(1+4x)(1-2x)} = \frac{1-4x^2-1+16x^2}{(1+4x)(1-2x)} = \frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$$

Tableau de signe de : $f(x) - g(x) = \frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$12x^2$		+		+	0	+		+	
$(1+4x)$		−	0	+		+		+	
$(1-2x)$		+		+		+	0	−	
$f(x)-g(x)$		−	‖	+	0	+	‖	−	

$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{4};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right]$

Donc : $f > g$ sur $\left]-\frac{1}{4};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right]$ et $f \leq g$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right]$

2) Déduisons les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g :

Par conséquent : (C_f) est confondue avec (C_g) pour : x = 0

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\frac{1}{4};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right]$

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right]$

2) Déduisons une comparaison des nombres : $A = \frac{1{,}0000002}{1{,}0000004}$ et $B = \frac{0{,}9999996}{0{,}9999998}$

PROF: ATMANI NAJIB

Comme : $x=10^{-7} \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ alors : $f\left(10^{-7}\right)-g\left(10^{-7}\right)>0$

On a : $f\left(10^{-7}\right)=\frac{1+2\times10^{-7}}{1+4\times10^{-7}}=\frac{1,0000002}{1,0000004}=A$ et $g\left(10^{-7}\right)=\frac{1-4\times10^{-7}}{1-2\times10^{-7}}=\frac{0,9999996}{0,9999998}=B$

Alors : $f\left(10^{-7}\right)>g\left(10^{-7}\right)$ c'est-à-dire : $A>B$

Exercice 5 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2-1}$ 2) $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ 3) $T(x)=|2-x|+|x+2|$

Solution : 1) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\frac{-x|-x|}{(-x)^2-1}=-\frac{x|x|}{x^2-1}$

$f(-x)=f(x)$

Donc : f est une fonction impaire

2) $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$: On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $1+x^2\neq 0$

$1+x^2=0$ Équivaut à: $x^2=-1$ impossible par suite : $D_f=\mathbb{R}$

On va donc montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $f(1)$et $f(-1)$

$f(1)=\frac{1+1}{1+1^2}=\frac{2}{2}=1$ et $f(-1)=\frac{1-1}{1+(-1)^2}=\frac{0}{2}=0$ donc : $f(-1)\neq -f(1)$

Par suite : f n'est ni paire ni impaire

3) $T(x)=|2-x|+|x+2|$

a) On a : $D_T=\mathbb{R}$

- b) si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $T(-x)=|2-(-x)|+|-x+2|=|2+x|+|-(x-2)|$

$T(-x)=|2+x|+|x-2|$ car : $|-X|=|X|$

$T(-x)=|x-2|+|2+x|$

Donc : $T(-x)=T(x)$

Donc : T est une fonction paire,

Exercice 6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=|x-2|-3$

Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f et déterminer les extremums de f

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x)=|x-2|-3$

a) Si : $x \geq 2$ alors : $f(x)=x-2-3=x-5$

b) Si : $x \leq 2$ alors : $f(x)=-(x-2)-3=-x-1$

Donc : f est strictement croissante sur : $[2;+\infty[$ car : $f(x)=ax+b=1x-5$ et $a>0$

f est strictement décroissante sur : $]-\infty;2]$ car : $f(x)=ax+b=-1x-1$ et $a=-1<0$

le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗	
			-3		

D'après le tableau de variations de f : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq f(2)$

Donc : $f(2)=-3$ est une valeur minimale de f au point $x_0=2$

Exercice 7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$ Montrer que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+2$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ On a : $0 \leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x \in [-1;3]$ On a : $0 \leq f(x) \leq 16$

c) En déduire que : pour tout $x \in [-5;-2]$ On a : $1 \leq f(x) \leq 16$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=x+3$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : $f(x)=x^2+2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+2x_2+1)-(x_1^2+2x_1+1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+2x_2+1-x_1^2-2x_1-1}{x_2-x_1}$$

PROF: ATMANI NAJIB

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^{\,2}-x_1^{\,2}+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=x_1+x_2+2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-1;+\infty[$ et $x_2\in[-1;+\infty[$ alors : $x_1\geq -1$ et $x_2\geq -1$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-2$

Par suite : $x_1+x_2+2>0$.

Donc $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-1]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-1]$ et $x_2\in]-\infty;-1]$ alors : $x_1\leq -1$ et $x_2\leq -1$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique $x_1+x_2<-2$

Par suite : $x_1+x_2+2<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+1=1-2+1=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1)=0$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-1)\leq f(x)$

Par suite : $0\leq f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in[-1;3]$ alors : $-1\leq x\leq 3$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;3]$

Alors : $f(-1)\leq f(x)\leq f(3)$ et comme : $f(-1)=0$ et $f(3)=3^2+2\times3+1=9+6+1=16$

Par suite : $0\leq f(x)\leq 16$

b) Soit : $x\in[-5;-2]$ On a alors : $-5\leq x\leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2)\leq f(x)\leq f(-5)$ et comme :

$f(-5)=(-5)^2+2\times(-5)+1=25-10+1=16$ Et $f(-2)=(-2)^2+2\times(-2)+1=4-4+1=1$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : $1 \le f(x) \le 16$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+2x+1=0$

Signifie : $(x+1)^2=0$

Signifie : $x+1=0$ c'est-à-dire : $x=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(-1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2+2\times0+1=1$

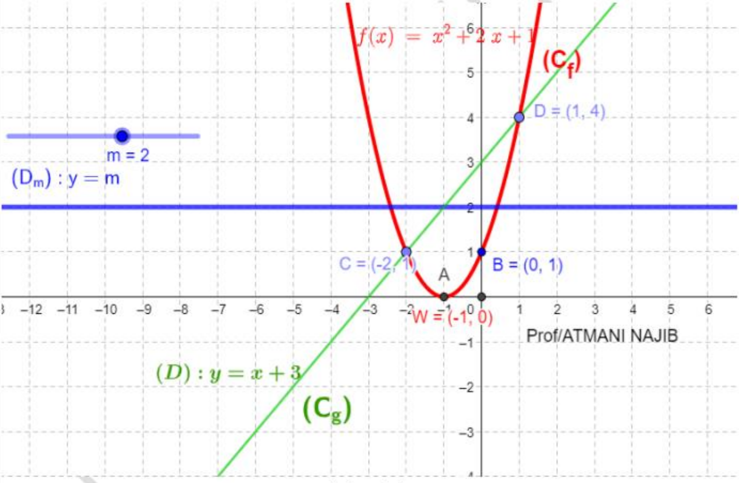
Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	-2	1
g(x)	1	4

NAJIB



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=1$ donc $S=\{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2+2x+1=x+3$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times1=1+8=9>0$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{-1-3}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$

Donc : $S=\{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)<f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessous de (C_f) si $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)<f(x)$:

$g(x)<f(x)$ Signifie $x+3<x^2+2x+1$

C'est-à-dire : $x^2+x-2>0$

Les racines sont : $x_1=1$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$-x^2-2x+m-1=0$ Signifie $m=x^2+2x+1$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m<0$ l'équation n'admet pas de solution

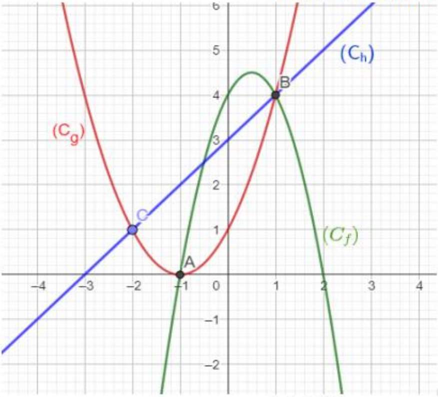
Si : $m=0$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m>0$ il y'a deux solutions

Exercice 8 : Soient f ; g et h trois fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) et (C_h) si dessous :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{g(x)\times h(x)}{f(x)}\geq 0$

PROF. ATMANI NAJIB



Solution : Etudions le signe de : $\dfrac{g(x)\times h(x)}{f(x)}$

Voici donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

$$\frac{g(x)\times h(x)}{f(x)}\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;-3\right]\cup\left]-1;2\right[$$

$S=\left]-\infty;-3\right]\cup\left]-1;2\right[$

MANI NAJIB

Exercice 9 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que f est minorée.

b) Est ce que f admet une valeur minimale ?

2) Démontrer que f est non majorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1) a) $f(x)=x^2-2x+3=\left(x^2-2x+1\right)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2\geq 0$

Donc : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2

b) On a : $f(1)=2$ donc : $f(x)\geq f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M\in\mathbb{R}: f(x)\leq M\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:(x-1)^2+2\leq M \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:(x-1)^2\leq M-2 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{M-2}$ (On peut toujours supposer $M\geq 2$)

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\leq\sqrt{M-2}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}\leq x-1\leq\sqrt{M-2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1\leq x\leq\sqrt{M-2}+1\quad\forall x\in\mathbb{R}$ absurde

Donc f est non majorée

Exercice 10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$; Conclure.

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m=0$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

PROF: ATMANI NAJIB

Si $x \in \mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}} \succ 0$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{x}} \succ 1$

Donc : $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \succ 1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1 \succ 2$

Donc : $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)} \prec \frac{1}{2}$ par suite : $f(x) \prec \frac{1}{2}$

Et on a : $f(0)=0 \prec \frac{1}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$ $f(x) \prec \frac{1}{2}$

Par suite f est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion : $0 \prec f(x) \prec \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^{+}$.

Exercice 11 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

Montrer que : f est bornée

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a : $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$

Donc : $x^2-2x+1 \geq 0$ et $x^2+2x+1 \geq 0$

Donc : $x^2+1 \geq 2x$ et $x^2+1 \geq -2x$

Donc : $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$ et $\frac{2x}{x^2+1} \geq -1$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq f(x) \leq 1$

Conclusion : f est bornée

Exercice 12 : Montrer que la fonction : $f(x)=\sin 2x-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est périodique de période 4π.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+4\pi)=\sin(2x+8\pi)-2\cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right)=\sin(2x+4\times 2\pi)-2\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)$$

$f(x+4\pi)=\sin(2x)-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$) car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π.

Et t que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Ainsi, $f(x+4\pi)=f(x)$

La fonction f est donc périodique de période 4π.

Exercice 13 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=1$

Tel que : $f(x)=x^2 \quad \forall x \in [0;1[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $I=[-3;3]$ dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

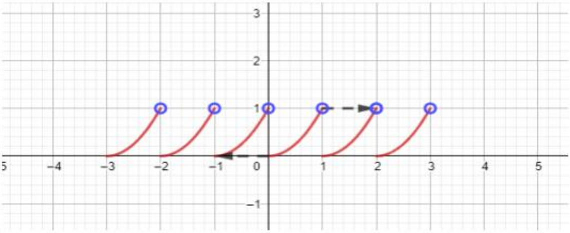
2) Calculer : $f(2,1)$; $f(-100,5)$; $f(2030,2)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[$ $k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;1[$: On a : f est une fonction polynôme

Donc la courbe (C_f) c'est une portion de parabole.

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) $\rightarrow f(2{,}1)=f(2+0.1)=f(2\times1+0{,}1)=f(0{,}1)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(2{,}1)=f(0{,}1)$ et puisque : $0{,}1\in[0;1[$

Alors : $f(2{,}1)=f(0{,}1)=(0{,}1)^2=0{,}01$

$\rightarrow f(-100{,}5)=f(-101+0{,}5)=f(-101\times1+0{,}5)=f(0{,}5)$ car f est périodique de période $T=1$;

Donc : $f(-100{,}5)=f(0{,}5)=(0{,}5)^2=0{,}25$ car : $0{,}5\in[0;1[$

$\rightarrow f(2030{,}2)=f(2030+0{,}2)=f(2030\times1+0{,}2)=f(0{,}2)$ car f est périodique de période $T=1$;

Donc : $f(2030{,}2)=f(0{,}2)=(0{,}2)^2=004$ car : $0{,}12\in[0;1[$

3) L'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[$ $k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[k;k+1[\Leftrightarrow k\le x\prec k+1$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\le x-k\prec 1\Leftrightarrow f(x-k)=(x-k)^2$

Or : f est périodique de période $T=1$ alors : $f(x-k)=f(x-k\times1)=f(x)$

Donc : $f(x)=(x-k)^2$ si $x\in[k;k+1[$ $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 14 : Etudier les variations des fonctions définies par :

PROF ATMANI NAJIB

1) $g(x)=-\frac{x^3}{2026}-2030$ 4) $h(x)=-\frac{6}{x}+2000$

Solution : 1) Posons : $f:x\to x^3$ et $D_f=\mathbb{R}$

Puisque que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que : $g=-\frac{1}{2026}f-2030$ avec $-\frac{1}{2026}<0$

Alors : $g=-\frac{1}{2026}f-2030$:est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	↘

2) $h(x)=-\frac{6}{x}+2000$ et $D_h=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et

$h(x)=-6h+2000$

Alors : k est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-6<0$

Exercice 15 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\frac{x-1}{x-2}$

1) Déterminer : D_f ; D_g et $D_{f\circ g}$

2) Déterminer : $(f\circ g)(x)$; $\forall x\in D_{f\circ g}$

Solution : 1) →On a : $D_f=\mathbb{R}$

→On a : $x\in D_g \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

→On a : $x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow x\in D_g \;\; et \;\; g(x)\in D_f \Leftrightarrow x\neq 2 \;\; et \;\; g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\neq 2$

Donc : $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{2\}$

2) Déterminons $(f\circ g)(x)$; $\forall x\in D_{f\circ g}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2-g(x)=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2-\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-1)^2-(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

Donc : $(f\circ g)(x)=\frac{x-1}{(x-2)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Exercice 16 : Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

1) Donner le tableau de variations de f et g

PROF ATMANI NAJIB

2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminer D_h

b) Calculer : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad \forall x\in D_h$

3) Etudier les variations de h sur les intervalles : $]-\infty;0[$; $]0;2]$;$[2;4[$ et $]4;+\infty[$

Solution : 1) a) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$; on a $f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}\quad \Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3>0$

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(-1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-1$ et $y=2$.

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

b) $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$: $D_g=\mathbb{R}$

Le tableau de variation de g : On a : $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=-1$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{2}{-2\frac{1}{2}}=2$ et $\beta=g(\alpha)=g(2)=-\frac{1}{2}2^2+2\times 2-1=1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	1	↘

2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminons D_h :

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\}$

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et D_g

$x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et-\frac{1}{2}x^2+2x-1\neq -1\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et-\frac{1}{2}x^2+2x\neq 0$

$x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ;x\left(-\frac{1}{2}x+2\right)\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ x\neq 0\ et\ x\neq 4$

PROF ATMANI NAJIB

Donc : $D_h = \mathbb{R} - \{0;4\} =]-\infty;0[\cup]0;4[\cup]4;+\infty[$

b) Calculons : $h(x) = (f \circ g)(x)\quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0;4\}$

Soit : $x \in \mathbb{R} - \{0;4\}$; $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{2\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right) - 1}{-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 + 1} = \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 4x}$

Donc : $h(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 4x}$

3) →Etude des variations de h sur l'intervalle : $]-\infty;0[$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$g(x)$		↗	-1	↗	1	↘	-1	↘	

On a : $h(x) = (f \circ g)(x)$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{0;4\}$

Puisque g est croissante sur $]-\infty;0[$ et $g(]-\infty;0[) \subset]-\infty;-1[$ et f est croissante sur $]-\infty;-1[$ alors h est croissante sur $]-\infty;0[$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $]0;2]$

Puisque g est croissante sur $]0;2]$ et $g(]0;2]) \subset]-1;1]$ et f est croissante sur $]-1;-1]$ alors h est croissante sur $]0;2]$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $[2;4[$

Puisque g est décroissante sur $[2;4[$ et $g([2;4[) \subset]-1;1]$ et f est croissante sur $]-1;1]$ alors h est décroissante sur $[2;4[$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $]4;+\infty[$

Puisque g est décroissante sur $]4;+\infty[$ et $g(]4;+\infty[) \subset]-\infty;-1[$ et f est croissante sur $]-1;1]$ alors h est décroissante sur $]4;+\infty[$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$h(x)$		↗	‖	↗	$\frac{1}{3}$	↘	‖	↘	

Exercice 17 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 3x - 6\sqrt{x-1} + 8$

1) a) Déterminer D_f

b) Démontrer que f admet une valeur minimale en 2 sur D_f

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = \sqrt{x-1}$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Représenter (C_g) La courbe représentative de g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déterminer :

$g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$

PROF. ATMANI NAJIB

c) Déterminer la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x \in [1;+\infty[\ ;\ f(x) = (h \circ g)(x)$

Puis étudier les variations de f

Solution : 1) a) $f(x) = 3x - 6\sqrt{x-1} + 8$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1;+\infty[$

Par suite : $D_f = [1;+\infty[$

b) Démontrons que f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

C'est-à-dire : montrons $\forall x \in [1;+\infty[\ ; f(x) \geq f(2)$

Soit $x \in [1;+\infty[$: $f(x) - f(2) = 3x - 6\sqrt{x-1} + 8 - 8 = 3x - 6\sqrt{x-1} = 3\left(x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1\right)$

$f(x) - 8 = 3\left(\sqrt{x-1}^2 - 2\sqrt{x-1} + 1^2\right) = 3\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \geq 0$

Donc : $f(x) + 4 \geq 0$ par suite : $f(x) \geq -4$ et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

Donc : $\forall x \in [1;+\infty[\ ; f(x) \geq f(2)$

Par suite : f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = \sqrt{x-1}$

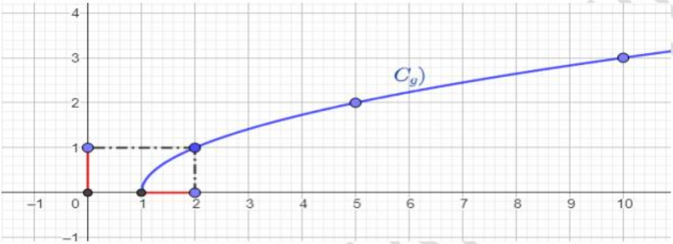
a) Dresser le tableau de variation de g

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1;+\infty[$

g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

x	1	$+\infty$
$g(x)$	0	↗

b)



c) Déterminons : $g([1;2])$

$\rightarrow x \in [1;2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(2)$ car g est strictement croissante sur $[1;2]$

$\Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow g(x) \in [0;1]$

Donc : $g([1;2]) \subset [0;1]$ (1)

→ Réciproquement

Soit $b \in [0;1]$: la droite d'équation : $y = b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[1;2]$

Donc : $\forall b \in [0;1]$; $\exists! x \in [1;2] / g(x) = b$

Donc : $[0;1] \subset g([1;2])$ (2)

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([1;2]) = [0;1]$

d) Déterminons : $g([2;+\infty[)$

$\rightarrow x \in [2;+\infty[\Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow g(x) \geq g(2)$ car g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1 \Rightarrow g(x) \in [1;+\infty[$$

Donc : $g([2;+\infty[) \subset [1;+\infty[$ (1)

→ Réciproquement

Soit $b \in [1;+\infty[$: la droite d'équation : $y = b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[2;+\infty[$

Donc : $\forall b \in [1;+\infty[$; $\exists! x \in [2;+\infty[/ g(x) = b$

Donc : $[1;+\infty[\subset g([2;+\infty[)$ (2)

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([2;+\infty[) = [1;+\infty[$

c) Déterminons la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x \in [1;+\infty[$; $f(x) = (h \circ g)(x)$ puis étudions les variations de f :

Soit $x \in [1;+\infty[$: on a : $f(x) - 8 = 3\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$

Donc : $f(x) = 3\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + 8 = 3(g(x) - 1)^2 + 8$

On pose : $h(x) = 3(x-1)^2 + 8$

Donc : $f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$

Donc : $f = (h \circ g)$

Dressons le tableau de variation de h :car $h(x) = 3(x-1)^2 + 8$ polynôme du second degré

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	↘	8	↗

On a : $f = (h \circ g)$

• Puisque g est strictement croissante sur $[1;2]$ et $g([1;2]) = [0;1]$ et h est strictement décroissante

PROF. ATMANI NAJIB

sur $[0;1]$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement décroissante sur $[1;2]$

• Puisque g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ et $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$ et h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

Exercice 18 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^4+1}$

1) Etudier la parité de f

2) Montrer que f est majorée par 1 est minorée par -1

3)Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

a) Donner le tableau de variation de g :

b) Déterminer : $g([0;2[)$

4) Soit h une fonction numérique tel que : $h(x)=x^4$

a) Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$

b) Vérifier que : $f=g\circ h$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solution :1) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^4+1}$

Etudions la parité de f

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $x^4+1\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $x^4\neq -1$: qui est une proposition vraie

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{(-x)^4-1}{(-x)^4+1}=\dfrac{x^4-1}{x^4+1}=f(x)$ C'est à dire : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Montrons que f est majorée par 1 est minorée par -1

$$f(x)-1=\frac{x^4-1}{x^4+1}-1=\frac{-2}{x^4+1}\prec 0$$

Donc : $f(x)<1$ dans $\mathbb{R}$

Donc : f est majorée par 1

$$f(x)+1=\frac{x^4-1}{x^4+1}+1=\frac{2x^4}{x^4+1}\geq 0$$

Donc : $-1\leq f(x)$ dans $\mathbb{R}$

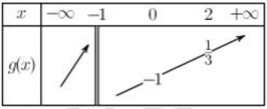
Donc : f est minorée par -1

3)Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

a) Donner le tableau de variation de g

$g(x)=\frac{x-1}{x+1}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2>0$

Donc :g est strictement croissante sur : $]-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1[$


x
$-\infty$
-1
0
2
$+\infty$
$g(x)$
$\frac{1}{3}$
-1

b) Déterminons : $g([0;2[)$

Du tableau de variation de g en déduit que : $g([0;2[)=\left[-1;\frac{1}{3}\right[$

4)Soit h une fonction numérique tel que : $h(x)=x^4$

a) Etudions les variations de h sur $\mathbb{R}^+$

Soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1^4-x_2^4}{x_1-x_2}=-\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)}{x_1-x_2}=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)>0$$

car : $x_1\geq 0$ et $x_2>0$ alors : $x_1+x_2>0$ et puisque : $x_1^2+x_2^2>0$

Par suite h est croissante sur $\mathbb{R}^+$

b) Vérifions que : $f=g\circ h$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{h(x)-1}{h(x)+1}=\frac{x^4-1}{x^4+1}=f(x)$$

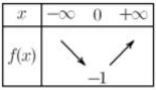
Donc : $f=g\circ h$

c) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

On a : $f=g\circ h$ sur $\mathbb{R}^+$

Puisque h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $f=g\circ h$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme f est une fonction paire

Alors : f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$


x
$-\infty$
0
$+\infty$
$f(x)$
-1

Exercice 19 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{x-E(x)}$

1) Calculer : $f(1,5)$; $f(-2,75)$

2) Déterminer D_f

3) Vérifier que 1 est une période pour la fonction f

3) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=]0;1[$

4) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]\cap D_f$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}$

1) Calculons : $f(1,5)$; $f(-2,75)$

$$f(1,5)=\frac{1}{1,5-E(1,5)}=\frac{1}{1,5-1}=\frac{1}{0,5}=2$$

$$f(-2,75)=\frac{1}{-2,75-E(-2,75)}=\frac{1}{-2,75-(-3)}=\frac{1}{3-2,75}=\frac{1}{0,25}=4$$

2) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq E(x)\}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$ et $x-1\in\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=\dfrac{1}{x+1-E(x+1)}=\dfrac{1}{x+1-E(x)-1}=\dfrac{1}{x-E(x)}=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

4) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :

$D_E=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\cap[0;1[=]0;1[$

Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=]0;1[$:

PROF.ATMANI NAJIB

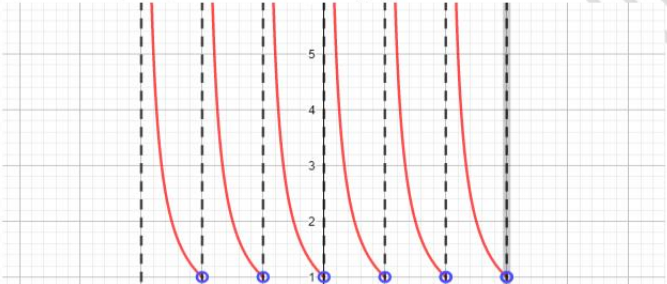
$x\in]0;1[\Leftrightarrow 0\prec x\prec 1$ Donc : $E(x)=0$

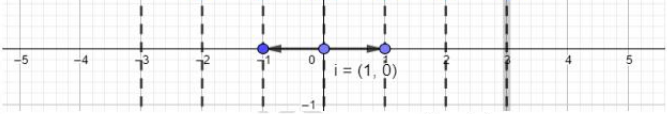
Donc : $f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}=\dfrac{1}{x-0}=\dfrac{1}{x}$

Donc : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ si $x\in]0;1[$

5) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]\cap D_f$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]\cap D_f$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $x\in]0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$





Exercice 20 : Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = E(x)$ (partie entière d'un nombre)

1) Montrer que : La partie entière est une fonction croissante.
2) La fonction partie entière est-elle strictement croissante.
3) Montrer que : La partie entière est une fonction non injective
4) Montrer que : La partie entière est une fonction non surjective
5) Montrer que : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$

Solutions : 1) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall y \in \mathbb{R}$; $x \prec y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$

Soient : $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; tel que : $x \prec y$

On a : $x \prec y$ et comme : $E(x) \leq x$ alors : $E(x) \prec y$ or on sait que : $E(y)$ est le plus grand entier relatif intérieur ou égale à y et $E(x)$ est un entier relatif intérieur ou égale à y

Alors en déduit que : $E(x) \leq E(y)$

2) Montrons que : la proposition P : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall y \in \mathbb{R}$; $x \prec y \Rightarrow E(x) \prec E(y)$ est fausse

C'est-à-dire : Montrons que : $\overline{P}$ $\exists x \in \mathbb{R}$; $\exists y \in \mathbb{R}$; $x \prec y$ *et* $E(x) \geq E(y)$ est vraie

En effet : $\exists x = 1 \in \mathbb{R}$; $\exists y = 1,2 \in \mathbb{R}$; $1 \prec 1,2$ *et* $E(1) = 1 \geq E(1,2) = 1$ est vraie

Donc : $\overline{P}$ est vraie par suite P : est fausse

3) Montrons que : La partie entière est une fonction non injective

Montrons que : $\exists x \in \mathbb{R}$; $\exists y \in \mathbb{R}$; $E(x) = E(y)$ *et* $x \neq y$ est vraie

En effet : $\exists x = 1 \in \mathbb{R}$; $\exists y = 1,2 \in \mathbb{R}$; $E(1) = E(1,2) = 1$ et $1 \neq 1,2$ est vraie

Donc : La partie entière est une fonction non injective

4) Montrons que : La partie entière est une fonction non surjective

Montrons que $\exists y \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$; $E(x) \neq y$ est vraie

En effet : $\exists y = 1,2 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $E(x) \neq 1,2$ est vraie car $E(x) \in \mathbb{Z}$

Donc : La partie entière est une fonction non surjective donc non bijective

5) Montrons que : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$

$\subset$) Montrons que : $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$

Soit : $y \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \ / \ y = f(x) = E(x)$ or $E(x) \in \mathbb{Z}$ donc : $y \in \mathbb{Z}$

Donc : $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$

$\supset$) Montrons que : $\mathbb{Z} \subset f(\mathbb{R})$

Soit : $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = E(y) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \ / \ y = f(x) = E(x)$ $(x = y) \Rightarrow y \in f(\mathbb{R})$

Donc : $\mathbb{Z} \subset f(\mathbb{R})$

Par suite : $f(\mathbb{R})=\mathbb{Z}$

Exercice 21 : Soit la fonction f tel que : $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

1)Déterminer : D_f

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

3)a) Montrer que : $f(x)=-x$; $\forall x\in\left]-\infty;0\right]$

b) Simplifier : $f(x)$ si $x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ et aussi si $x\in\left]\dfrac{3}{2};2\right]$

4)Tracer (C_f) la représentation graphique de la fonction f sur : $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

5) a) Calculer : $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ si $n\in\mathbb{N}^*$ b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=1$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)>1$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\}=\mathbb{R}-\{1\}=\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow xE\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $E\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $0\leq\dfrac{1}{x-1}<1$

$\Leftrightarrow x=0$ ou ($0\leq\dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{1}{x-1}<1$) $\Leftrightarrow x=0$ ou ($0<x-1$ et $x-1>1$) $\Leftrightarrow x=0$ ou ($1<x$ et $x>2$)

$\Leftrightarrow x\in\left]2;+\infty\right[\cup\{0\}$ donc : $S=\left]2;+\infty\right[\cup\{0\}$

3)a) Montrons que : $f(x)=-x$; $\forall x\in\left]-\infty;0\right]$

On a : $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

Soit : $x\in\left]-\infty;0\right]$ donc : $x\leq 0\Rightarrow x-1\leq -1\Rightarrow\dfrac{1}{x-1}\geq -1\Rightarrow -1\leq\dfrac{1}{x-1}<0\Rightarrow E\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=-1$

Par suite : $f(x)=x\times(-1)=-x$; $\forall x\in\left]-\infty;0\right]$

b) Simplifions $f(x)$: si $x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$

Soit : $x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ donc : $0<x\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0-1<x-1\leq\dfrac{1}{2}-1\Rightarrow -1<x-1\leq -\dfrac{1}{2}<0\Rightarrow -2\leq\dfrac{1}{x-1}<-1$

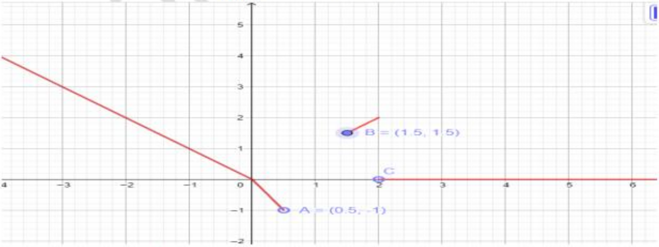
$\Rightarrow E\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=-2$ Par suite : $f(x)=x\times(-2)=-2x$; $\forall x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$

Simplifions $f(x)$: si $x\in\left]\dfrac{3}{2};2\right]$

Soit : $x\in\left]\frac{3}{2};2\right]$ donc : $\frac{3}{2}\prec x\le 2\Rightarrow\frac{3}{2}-1\prec x-1\le 2-1\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x-1\le 1\Rightarrow 1\le\frac{1}{x-1}\prec 2$

$\Rightarrow E\left(\frac{1}{x-1}\right)=1$ Par suite : $f(x)=x\times 1=x$; $\forall x\in\left]\frac{3}{2};2\right]$

4) D'après ce qui précède : $\begin{cases} f(x)=-x & si \quad x\le 0 \\ f(x)=-2x & si \quad 0\prec x\le\frac{1}{2} \\ f(x)=x & si \quad \frac{3}{2}\prec x\le 2 \\ f(x)=0 & si \quad 2\prec x \end{cases}$



5) a) Calculer : $f\left(\frac{1}{n}\right)$ si $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}E\left(\frac{1}{\frac{1}{n}-1}\right)=\frac{1}{n}E\left(\frac{1}{\frac{1-n}{n}}\right)=\frac{1}{n}E\left(\frac{n}{1-n}\right)=\frac{1}{n}E\left(\frac{n-1+1}{1-n}\right)=\frac{1}{n}E\left(\frac{n-1}{1-n}+\frac{1}{1-n}\right)=\frac{1}{n}E\left(-1+\frac{1}{1-n}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(-1+E\left(\frac{1}{1-n}\right)\right)$$

On a : $n\in\mathbb{N}^*$ et $n\neq 1$ donc : $n\ge 2\Rightarrow n-1\ge 1\Rightarrow 0\prec\frac{1}{n-1}\le 1\Rightarrow 1\le\frac{1}{1-n}\prec 0$

Donc : $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}(-1+-1)=-\frac{2}{n}$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : (E) ; $f(x)=1$

S L'ensemble des solutions de l'équation (E)

$x\in S\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow xE\left(\frac{1}{x-1}\right)=1\Leftrightarrow E\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{x}$ car $x\neq 0$ sinon : $0=1$

On pose : $k=\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}^*-\{1\}\quad\Leftrightarrow x=\frac{1}{k}$

$$f(x)=1 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{\frac{1}{k}-1}\right)=k \Leftrightarrow E\left(\frac{k}{1-k}\right)=k \Leftrightarrow k \leq \frac{k}{1-k} \prec k+1 \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \frac{k}{1-k} \\ \frac{k}{1-k} \prec k+1 \end{cases} \quad avec : k \in \mathbb{Z}^{*}-\{1\}$$

$$k \leq \frac{k}{1-k} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k}{1-k}-k \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k+k^{2}-k}{1-k} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k^{2}}{1-k} \Leftrightarrow 0 \prec 1-k \Leftrightarrow k \prec 1 \quad avec : k \in \mathbb{Z}^{*}-\{1\}$$

$\frac{k}{1-k} \prec k+1 \Leftrightarrow \frac{k}{1-k}-(k+1) \prec 0 \Leftrightarrow \frac{k+k^{2}-1}{1-k} \prec 0$ Puisque : $k \prec 1$

Alors : $k+k^{2}-1 \prec 0$: $\Delta=5$ donc : $k'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $k''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$k+k^{2}-1 \prec 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \prec k \prec \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad avec : k \in \mathbb{Z}^{*}-\{1\}$$

Donc : $-1.6 \simeq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \prec k \prec \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0.6 \quad avec : k \in \mathbb{Z}^{*}-\{1\}$

Donc : $k=-1$ or $x=\frac{1}{k}$ c'est-à-dire : $x=\frac{1}{-1}=-1$ Donc : $S \subset \{-1\}$

Inversement : On peut vérifier que : $\{-1\} \subset S$ car : $f(-1)=-1 \times E\left(\frac{1}{-1-1}\right)=-1 \times E\left(-\frac{1}{2}\right)=(-1) \times(-1)=1$

Finalement : $S=\{-1\}$

c) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) ; $f(x) \succ 1$

S L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $x \in S \Leftrightarrow f(x) \succ 1 \Leftrightarrow x E\left(\frac{1}{x-1}\right) \succ 1$

D'après ce qui précède :

- ✓ Si : $x \leq 0$: $f(x)=-x$

$x \in S \Leftrightarrow -x \succ 1 \Leftrightarrow x \prec -1$

Donc : $S_{1}=]-\infty ;-1[$

- ✓ Si : $x \succ 2$: $f(x)=0$

$x \in S \Leftrightarrow 0 \succ 1$ Donc : $S_{2}=\varnothing$

- ✓ Si : $1 \prec x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \prec x-1 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 1 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x-1}\right) \geq 1$ et on a : $1 \prec x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \prec \frac{1}{x} \leq 1$

Donc : $\forall x \in]1 ; 2]$; $E\left(\frac{1}{x-1}\right) \geq \frac{1}{x}$

Donc : $S_{3}=]1 ; 2]$

- ✓ Si : $0 \prec x \prec 1 \Leftrightarrow 0 \prec 1-x$ donc : $\frac{1}{x-1} \prec 0$ et $\frac{1}{1-x} \succ 0 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x-1}\right) \prec 0$ et puisque on a : $\frac{1}{x} \succ 0$ alors : $E\left(\frac{1}{x-1}\right) \prec \frac{1}{x}$ impossible donc : $S_{4}=\varnothing$

PROF: ATMANI NAJIB

Finalement : $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;2\right[$

Exercice 22 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $E\left(\sqrt{x}\right)=E\left(\sqrt{E(x)}\right)$

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}^+$:

a) On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$ donc : $E(x)\leq x$

Donc : $\sqrt{E(x)}\leq\sqrt{x}$ car la fonction : $x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $E\left(\sqrt{E(x)}\right)\leq E\left(\sqrt{x}\right)$ ❶car la fonction : $x\mapsto E(x)$ est croissante

b) On a : $E(x)\leq x$ donc : $E\left(\sqrt{x}\right)\leq\sqrt{x}$

Alors : $\left(E\left(\sqrt{x}\right)\right)^2\leq\left(\sqrt{x}\right)^2$

Donc : $\left(E\left(\sqrt{x}\right)\right)^2\leq x$ or $\left(E\left(\sqrt{x}\right)\right)^2\in\mathbb{N}$ et inferieur a x

Donc : $\left(E\left(\sqrt{x}\right)\right)^2\leq E(x)$

Ainsi : $\sqrt{\left(E\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}\leq\sqrt{E(x)}$

Donc : $E\left(\sqrt{x}\right)\leq\sqrt{E(x)}$ or $E\left(\sqrt{x}\right)\in\mathbb{N}$ et inferieur a $\sqrt{E(x)}$

Donc : $E\left(\sqrt{x}\right)\leq E\left(\sqrt{E(x)}\right)$ ❷

De tout cela c'est-à-dire de ❶ et ❷ on conclut que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $E\left(\sqrt{x}\right)=E\left(\sqrt{E(x)}\right)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI