http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°5 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{x^3-2x-2021}{2x^2-3|x|-2}$ 2) $f(x)=\sqrt{x^2+27}-5\sqrt{3x}$ 3) $f(x)=\frac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}}}-1$

4) $f(x)=\frac{x^2-5x+1}{\sqrt{4x^4+4x^2-3}}$ 5) $f(x)=\sqrt{|x|(|x|-2)}$ 6) $f(x)=\frac{2\sin x+\sin x-5\tan x+6}{\sqrt{3}\tan x-1}$

Solution :1) $f(x)=\frac{x^3-2x-2021}{2x^2-3|x|-2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3|x|-2\neq 0\right\}$

$2x^2-3|x|-2=0$ Equivalent à : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

a = 2, b = -3 et c = - 2
Donc : $\Delta = b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=25$.
Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times2}=2$

Qui est équivalent à : $|x|=-\frac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie : $x=2$ ou $x=-2$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+27}-5\sqrt{3x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+27\geq0 \text{ et } 3x\geq0\right\}$ Or $x^2+27\geq0$ et $3>0$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}}}-1$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0\right\}$

$2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$: Calculons le discriminant du trinôme $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$:

$a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times2\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}$

PROF: ATMANI NAJIB

$\Delta=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{\sqrt{4x^4+4x^2-3}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,4x^4+4x^2-3>0\right\}$

a) D'abord on va trouver les racines de $4x^4+4x^2-3$

C'est un polynôme bicarré, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.
Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à un trinôme dont l'inconnue est X.

$4x^4+4x^2-3$ Équivaut à : $4\left(x^2\right)^2+4x^2-3$

Je pose : $X=x^2$ polynôme devient : $4X^2+4X-3$

Le discriminant de : $4X^2+4X-3$ est : $\Delta=4^2-4\times4\times(-3)=16+48=64>0$ et ses racines sont :

$X_1=\dfrac{-4-\sqrt{64}}{2\times4}=\dfrac{-12}{8}=-\dfrac{3}{2}$ et $X_2=\dfrac{-4+\sqrt{64}}{2\times4}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

Déterminons une factorisation de $4x^4+4x^2-3$.

On a : $4X^2+4X-3=4\left(X+\dfrac{3}{2}\right)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)=(2X+3)(2X-1)$

Donc : $4x^4+4x^2-3=\left(2x^2+3\right)\left(2x^2-1\right)$ et $2x^2+3>0$

$4x^4+4x^2-3\geq0$ Équivaut à : $2x^2-1\geq0$

$2x^2-1=0$ Signifie que : $x^2=\dfrac{1}{2}$ Signifie que : $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$4x^4+4x^2-3\geq 0$ Équivaut à : $x\in\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Ainsi : $D_f == \left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

5) $f(x)=\sqrt{|x|(|x|-2)}$ $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|(|x|-2)\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|-2\geq 0 \text{ ou } |x|=0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|\geq 2 \text{ ou } x=0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 2 \text{ ou } x\leq -2 \text{ ou } x=0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 2 \text{ ou } x\leq -2 \text{ ou } x=0\right\}$

Par suite : $D_f=\left]-\infty;-2\right]\cup\{0\}\cup\left[2;+\infty\right[$

6) $f(x)=\dfrac{2\sin x+\sin x-5\tan x+6}{\sqrt{3}\tan x-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \text{ et } \tan x\neq\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \text{ et } \tan x\neq\tan\frac{\pi}{6} \text{ et } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \text{ et } x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ et } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 2: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m\in\mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de m pour que : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$; déterminer les valeurs de m pour que $\forall x\in\{-2;1\}$ on a : $f(x)=g(x)$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}: x^2+x+m\neq 0$

$x^2+x+m\neq 0\Leftrightarrow \quad m\succ\frac{1}{4}\Leftrightarrow\Delta=b^2-4ac=1-4m\prec 0$

2) $f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\}\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2+x+m}=\dfrac{1}{x+2}$

$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)=x^2+x+m\Leftrightarrow x^2+x-2=x^2+x+m$

$f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\}\Leftrightarrow -2=m$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 3 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x-1 \ \ si \ \ x \in \left]-\infty;-1\right[\\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} \ \ si \, x \in [-1,1] \\ f(x) = x+1 \ \ si \, x \in \left]1;+\infty\right[\end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1) *Remarque :* $\begin{cases} f(x) = f_1(x) & si & x \in I_1 \\ f(x) = f_2(x) & si & x \in I_2 \\ f(x) = f_3(x) & si & x \in I_3 \end{cases}$ Alors : $D_f = \left(D_{f_1} \cap I_1\right) \cup \left(D_{f_2} \cap I_2\right) \cup \left(D_{f_3} \cap I_3\right)$

On pose : $f_1(x) = x-1$ et $I_1 = \left]-\infty;-1\right[$; $f_2(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ et $I_2 = [-1,1]$; $f_3(x) = x+1$ et $I_3 = \left]1;+\infty\right[$

$D_{f_1} = \mathbb{R}$; $D_{f_2} = \left]-\infty;-2\right] \cup \left]-2;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$ et $D_{f_3} = \mathbb{R}$

$D_{f_1} \cap I_1 = \mathbb{R} \cap \left]-\infty;-1\right[= \left]-\infty;-1\right[$; $D_{f_2} \cap I_2 = \left(\left]-\infty;-2\right] \cup \left]-2;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[\right) \cap [-1,1] = [-1,1]$

$D_{f_3} \cap I_3 = \mathbb{R} \cap \left]1;+\infty\right[= \left]1;+\infty\right[$

Donc : $D_f = \left]-\infty;-1\right[\cup [-1,1] \cup \left]1;+\infty\right] = \mathbb{R}$

2) ☞Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

☞→Si : $x \in \left]-\infty;-1\right[$ alors : $-x \in \left]1;+\infty\right[$

On a : $f(x) = x-1$ et $f(-x) = -x+1$ donc : $-f(x) = -x+1$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

☞→Si : $x \in [-1,1]$ alors : $-x \in [-1,1]$

On a : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ et $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\dfrac{x^3}{x^2-4}$ donc : $-f(x) = -\dfrac{x^3}{x^2-4}$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

☞→Si : $x \in \left]1;+\infty\right[$ alors : $-x \in \left]-\infty;-1\right[$

On a : $f(x) = x+1$ et $f(-x) = -x-1$ donc : $-f(x) = -x-1$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \ \ f(-x) = -f(x)$ par suite : f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de $\left(C_f\right)$ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E = \mathbb{R}^+$

Exercice 4 : Soit la fonction numérique : $f(x) = -4x^3 + \dfrac{1}{2x}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de f

3) Montrer que : $f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$: Pour tout $x \in D_f$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

4) Montrer que la fonction : $g(x)=f(x)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Solution : 1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[=\mathbb{R}-\{0\}$

2) Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

$$f(-x)=-4(-x)^3+\frac{1}{2(-x)}=-\left(-4x^3+\frac{1}{2x}\right)$$

Donc : $f(-x)=-f(x)$ si $x\in\mathbb{R}^*$

Cela signifie que : f est une fonction impaire

3) Pour tout $x\in D_f$ nous avons : $f(x)-f(-x)=f(x)-(-f(x))$ car f est une fonction impaire

Donc : $f(x)-f(-x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

D'où : $f(x)-f(-x)=2f(x)$

Par suite : $f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$: Pour tout $x\in D_f$

4) $g(x)=f(x)+1=-4x^3+\dfrac{1}{2x}+1$; on a : $D_g=\mathbb{R}^*$

$$g(-1)=-4(-1)^3+\frac{1}{2(-1)}+1=\frac{9}{2}$$

et $g(1)=-4(1)^3+\dfrac{1}{2\times 1}+1=-\dfrac{5}{2}$ et $-g(1)=\dfrac{5}{2}$

Nous remarquons que : $g(-1)\neq -g(1)$ et $g(-1)\neq g(1)$

Qui signifie que la fonction g est ni paire ni impaire,

Exercice 5 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^{2026}+2025}{2|x|-6}$

(C_f) La courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-6\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq 3\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-3;3\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-3;3\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{-3;3\}$

- $f(-x)=\dfrac{(-x)^{2026}+2025}{2|-x|-6}=\dfrac{x^{2026}+2025}{2|x|-6}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice 6 : Soient les deux fonctions : $f(x)=x^2+x-3$ et $g(x)=2x^2+x+1$

1) Comparer les fonctions f et g

PROF: ATMANI NAJIB

2) En déduire les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

Solution : 1) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$\rightarrow f(x)-g(x)=x^2+x-3-2x^2-x-1=-x^2+2=2-x^2=\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)$

Tableau de signe de : $f(x)-g(x)=\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$(\sqrt{2}-x)$		+	|	+	0	−	
$(\sqrt{2}+x)$		−	0	+	|	+	
$f(x)-g(x)$		−	0	+	0	−	

$f(x)-g(x)\geq 0 \iff x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Donc : $f \geq g$ sur $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ et $f < g$ sur $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

2) Déduisons les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g :

Par conséquent : (C_f) est confondue avec (C_g) pour : $x=-\sqrt{2}$ et $x=\sqrt{2}$

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

Exercice 7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que $\dfrac{2}{3}$ est le minimum de f sur D_f.

3) Montrer que 2 est le maximum de f sur D_f.

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x^2+x+1\neq 0\right\}$

$x^2+x+1=0$: $\Delta<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) il s'agit de montrer que : $\dfrac{2}{3}\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ et que l'équation : $f(x)=\dfrac{2}{3}$

Admet une solution dans D_f

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3x^2+3-2x^2-2x-2}{3\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{x^2-2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{(x-1)^2}{3\left(x^2+x+1\right)}$

Or : $x^2+x+1>0$ car $\Delta<0$ et $a=1>0$ et on a aussi : $(x-1)^2\geq 0$

Donc ; $f(x)-\dfrac{2}{3}\geq 0$ par suite : $\dfrac{2}{3}\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)-\dfrac{2}{3}=0\iff\dfrac{(x-1)^2}{3\left(x^2+x+1\right)}=0\iff(x-1)^2=0\iff x-1=0\iff x=1$

Par suite : $f(1)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Conclusion : $f(1)=\frac{2}{3}$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

2) il s'agit de montrer que : $f(x)\leq 2$; $\forall x\in\mathbb{R}$; et que l'équation : $f(x)=2$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-2=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-2=\frac{x^2+1-2x^2-2x-2}{x^2+x+1}=\frac{-x^2-2x-1}{3(x^2+x+1)}=\frac{-(x+1)^2}{x^2+x+1}\leq 0$

Or : $x^2+x+1>0$ car $\Delta<0$ et $a=1>0$ et on a aussi : $-(x+1)^2\leq 0$

Donc ; $f(x)-2\leq 0$ par suite : $f(x)\leq 2$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)-2=0 \Leftrightarrow \frac{-(x+1)^2}{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow -(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Conclusion : $f(-1)=2$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de f

3) Montrer que f est bornée

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Etudions la parité de f

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors : $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{3(-x)^2+1}{(-x)^2+1}=\frac{3x^2+1}{x^2+1}=f(x)$

Donc f est une fonction paire.

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2+1}=\frac{3x^2+3-2}{x^2+1}=\frac{3(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{-2}{x^2+1}=3+\frac{-2}{x^2+1}$

On a : $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1}\leq 1 \Rightarrow 0<\frac{2}{x^2+1}\leq 2 \Rightarrow -2\leq -\frac{2}{x^2+1}<0 \Rightarrow 3-2\leq 3-\frac{2}{x^2+1}<3 \Rightarrow 1\leq 3-\frac{2}{x^2+1}<3$

Donc : $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1}\leq 1 \Rightarrow 0<\frac{2}{x^2+1}\leq 2 \Rightarrow -2\leq -\frac{2}{x^2+1}<0 \Rightarrow 3-2\leq 3-\frac{2}{x^2+1}<3 \Rightarrow 1\leq f(x)<3$

Donc : f est bornée

Exercice 9 : Soit f une fonction :tel que : $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f

Tel que $x_1\neq x_2$.

PROF: ATMANI NAJIB

3) Étudier les variations de f sur $I=]0;1]$ puis sur $J=[1;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$$=\frac{x_1^2\times x_2+x_2-x_2^2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$$

$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$

a) Sur $I=]0;1]$: Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$ Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $x_1x_2-1\prec 0$ et on a $0\prec x_1x_2$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

D'où f est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b) Sur $J=[1;+\infty[$; Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ c'est-à-dire : $x_1x_2-1\succ 0$

Et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I Donc f est strictement décroissante sur I'
f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗

PROF: ATMANI NAJIB

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$ et $f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

Exercice 10 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ et périodique de période $T=1$

Tel que : $f(x)=\frac{1}{x}$ si $x\in\left]0;1\right[$

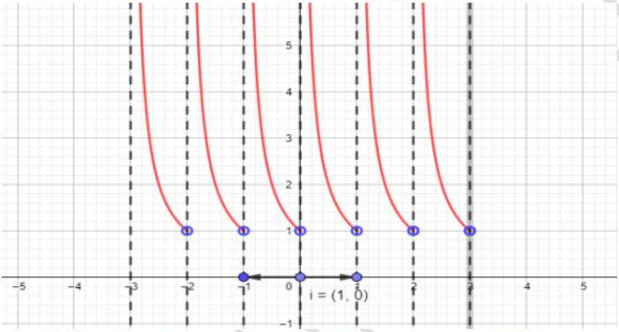
1)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $[-3;3]\cap D_f$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(2,5)$; $f(-12,25)$; $f(2025,01)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=\left]k;k+1\right[$ $k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=\left]0;1\right[$:la courbe(C_f) c'est une portion d'une hyperbole

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]\cap D_f$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=\left]0;1\right[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) $\rightarrow f(2,5)=f(2+0,5)=f(2\times1+0,5)=f(0,5)$car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(2,5)=f(0,5)$ et puisque : $0,5\in\left]0;1\right[$

Alors : $f(2,5)=f(0,5)=\frac{1}{0,5}=2$

$\rightarrow f(-12,25)=f(-13+0,75)=f(-13\times1+0,75)=f(0,75)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(-12,25)=f(0,75)$ et puisque : $0,75\in\left]0;1\right[$

Alors : $f(-12,25)=f(0,75)=\frac{1}{0,75}=\frac{4}{3}$

$\rightarrow f(2025,01)=f(2025+0,1)=f(2025\times1+0,1)=f(0,1)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $f(2025{,}01)=f(0{,}1)$ et puisque : $0{,}1\in\left]0;1\right[$

Alors : $f(2025{,}01)=f(0{,}1)=\frac{1}{0{,}1}=10$

3) L'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=\left]k;k+1\right[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=\left]k;k+1\right[\Leftrightarrow k<x<k+1$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\prec x-k\prec 1\Leftrightarrow f(x-k)=\frac{1}{x-k}$

Or : f est périodique de période $T=1$ alors : $f(x-k)=f(x-k\times 1)=f(x)$

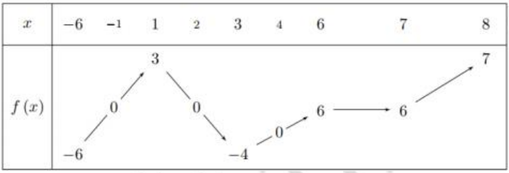
Donc : $f(x)=\frac{1}{x-k}$ si $x\in\left]k;k+1\right[\ k\in\mathbb{Z}$

Exercice 11 : À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

1) a) $f(1{,}4)\ldots\ldots f(2{,}3)$ b) $f(7{,}2)\ldots\ldots f(7{,}6)$ c) $f(6{,}2)\ldots\ldots f(6{,}7)$

2) Peut-on comparer l'image des nombres $2{,}3$ *et* $7{,}7$? Justifier.

3) Peut-on comparer l'image des nombres $1{,}9$ *et* $6{,}2$? Justifier.



Solution :1) a) $f(1{,}4)>f(2{,}3)$) car 1,4 < 2,3 et f est décroissante sur [1 ; 3].

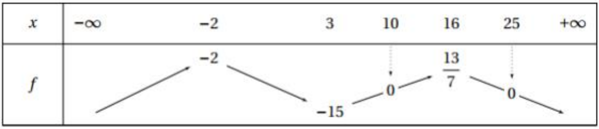
b) $f(7{,}2)<f(7{,}6)$ car 7,2 < 7,6 et f est croissante sur [7 ; 8].

c) $f(6{,}2)=f(6{,}7)$ car 6,2 < 6,7 et f est constante sur [6 ; 7].

2) $f(2{,}3)<f(7{,}7)$ car d'après le signe de la fonction $f(2{,}3)<0$ et $f(7{,}7)>0$ (par contre, on ne peut pas utiliser le sens de variation qui change sur l'intervalle [2,3 ; 7,7]).

3) On ne peut pas comparer l'image des nombres $1{,}9$ *et* $6{,}2$ car la fonction f n'est pas monotone (elle change de sens de variation) sur [1,9 ; 6,2].

Exercice 12 : On considère une fonction f dont le tableau de variation est le suivant :



PROF: ATMANI NAJIB

1)Quel est l'ensemble de définition de la fonction f?

2)a)Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;10]$?

b)Quel est le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\infty;10]$] ?

3)a) Quel est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$?

b) En déduire le nombre de solution de l'équation $f(x)=2$

Solution : 1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;10]$ est 0.

b) Sur l'intervalle $]-\infty;10]$ le maximum est 0. On a donc $f(x)\leq 0$ pour tout réel $x\in]-\infty;10]$.

$f(x)$ est donc négatif ou nul sur cet intervalle.

3) a) Le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est $\frac{13}{7}$

b) Par conséquent, pour tout réel x, on a $f(x)\leq\frac{13}{7}<2$

2 ne possède donc pas d'antécédent par la fonction f et l'équation $f(x)=2$ ne possède pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=5x^3+2x-4$

Déterminer, en justifiant, les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution : On considère deux réels a et b tels que $a<b$.

D'une part, la fonction cube étant strictement croissante on a $a^3<b^3$ et par conséquent $5a^3<5b^3$

D'autre part, le coefficient directeur de la fonction affine : $x\to 2x-4$ est 2>0.

Cette fonction est donc strictement croissante. Ainsi : $2a-4<2b-4$.

Ainsi $5a^3+2a-4<5b^3+2b-4$ donc $f(a)<f(b)$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=4x^2-8x+6$

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2) Soient : (D) la droite d'équation $(D): y=x-3$ et deux points :

$A(1;-1)$ et $B(0;-2)$ et $M(x;y)\in(D)$

a) Tracer la courbe représentative de (C_f) et la droite (D) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Déterminer les coordonnées de M pour que : MA^2+MB^2 soit minimale

Solution :1) On a : $f(x)=4x^2-8x+6$: f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=4$; $b=-8$ et $c=6$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{2\times(4)}=1$ et $f(1)=f(1)=4\times(1)^2-8\times1+6=4-8+6=2$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

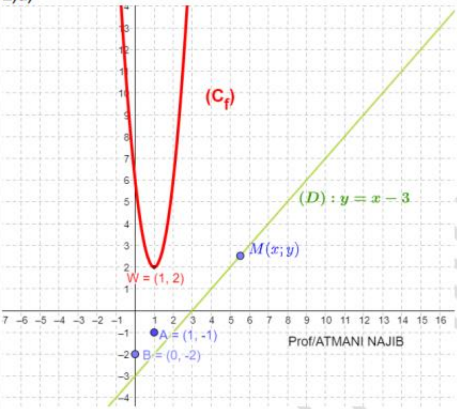
Comme : $\boxed{a=4>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$

Tableau de variations de f : On a $a=4>0$ donc :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x)$	↘ 2 ↗

2)a)



4)b) $M(x;y)\in(D)$ signifie que : $y=x-3$

Donc : $M(x\,;x-3)$

Donc : $\overrightarrow{AM}(x-1\,;x-3+1)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AM}(x-1\,;x-2)$

Et $\overrightarrow{BM}(x-0\,;x-3+2)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BM}(x;\,x-1)$

$$MA^2+MB^2=\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}^{\,2}+\sqrt{x^2+(x-1)^2}^{\,2}$$

Donc : $MA^2+MB^2=(x-1)^2+(x-2)^2+x^2+(x-1)^2$

Donc : $MA^2+MB^2=x^2-2x+1+x^2-4x+4+x^2+x^2-2x+1$

Donc : $MA^2+MB^2=4x^2-8x+6$

Donc : $MA^2+MB^2=f(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

$MA^2 + MB^2$ est minimale si et seulement si $f(x)$ est minimale

D'après le tableau de variation de f on a : $f(1)=2$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : $MA^2 + MB^2$ est minimale si $x=1$ et $y=2$

Par suite : $M(1\,;2)$

Exercice 15 : Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{20-x}+\sqrt{x}$

---

1) Déterminer : D_f

2) Etudier les variations de f sur $[0,10]$

3) Déduire une comparaison des nombres : $\sqrt{3}+\sqrt{17}$; $\sqrt{2}+\sqrt{18}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{15}$

Solutions : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/20-x\geq 0 \;\; et \;\; x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 20 \;\; et \;\; x\geq 0\}$

Donc : $D_f=[0,20]$

2) Etudions les variations de f sur $[0,10]$

Soient : $x_1\in[0,10]$ et $x_2\in[0,10]$ tel que : $x_1\neq x_2$: Calculons : $(f(x_1))^2-(f(x_2))^2$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{20-x_1}+\sqrt{x_1}-\sqrt{20-x_2}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{20-x_1}-\sqrt{20-x_2}}{x_1-x_2}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)}{(x_1-x_2)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)}+\frac{\left(\sqrt{20-x_1}-\sqrt{20-x_2}\right)\left(\sqrt{20-x_1}+\sqrt{20-x_2}\right)}{(x_1-x_2)\left(\sqrt{20-x_1}+\sqrt{20-x_2}\right)}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{20-x_1}+\sqrt{20-x_2}}$$

On a : $0\leq x_1\leq 10$ et $0\leq x_2\leq 10$ donc : $-10\leq -x_1\leq 0$ et $-10\leq -x_2\leq 0$

Donc : $10\leq 20-x_1\leq 20$ et $10\leq 20-x_2\leq 20$

Donc : $\sqrt{10}\leq\sqrt{20-x_1}\leq\sqrt{20}$ et $\sqrt{10}\leq\sqrt{20-x_2}\leq\sqrt{20}$

Et on a : $0\leq\sqrt{x_1}\leq\sqrt{10}$ et $0\leq\sqrt{x_2}\leq\sqrt{10}$

Donc : $\sqrt{x_1}\leq\sqrt{20-x_1}$ et $\sqrt{x_2}\leq\sqrt{20-x_2}$

Donc : $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leq\sqrt{20-x_1}+\sqrt{20-x_2}$

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{20-x_1}+\sqrt{20-x_2}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$

Par suite : $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geq 0$

D'où : f est croissante sur $[0,10]$

3) Déduisons une comparaison des nombres : $\sqrt{3}+\sqrt{17}$; $\sqrt{2}+\sqrt{18}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{15}$

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $2<3<5$ et comme f est croissante sur $[0,10]$

Alors : $f(2)\le f(3)\le f(5)$

C'est-à-dire : $\sqrt{2}+\sqrt{18}\le\sqrt{3}+\sqrt{17}\le\sqrt{5}+\sqrt{15}$

Exercice 16 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$:

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{3}{2}$

2) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction f

3) Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\ne x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

4) En déduire les variations de f sur les intervalles : $I=\left]-\infty,-1\right]$; $J=[-1,1]$ et $K=\left[1;+\infty\right[$

Solutions : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{3}{2}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: On a : $f(x)-\frac{1}{2}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2}=\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}\ge 0$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{1}{2}\le f(x)$ (1)

On a : $f(x)-\frac{3}{2}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{3}{2}=-\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}\le 0$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\le\frac{3}{2}$

De : (1) et (2) on obtient : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{3}{2}$

2) Déterminons l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction f

→ On a : si $x\in\mathbb{R}$ alors : $\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{3}{2}$ donc : $\boxed{f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]}$ (1)

→ Montrons que : $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\subset f(\mathbb{R})$

Soit : $y\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$: trouvons s'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que : $y=f(x)$

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\Leftrightarrow x^2+x+1=y(x^2+1)\Leftrightarrow(1-y)x^2+x+1-y=0$$

Si : $y=1$: $x=0$ existe

Si : $y\ne 1$: $(1-y)x^2+x+1-y=0$: $\Delta=(-1+2y)(3-2y)$ et comme : $\frac{1}{2}\le y\le\frac{3}{2}$ alors : $\Delta\ge 0$

Donc : l'équation possède une ou deux solutions

Donc : $\boxed{\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\subset f(\mathbb{R})}$ (2)

PROF: ATMANI NAJIB

De : (1) et (2) on obtient : $\boxed{f(\mathbb{R})=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]}$

3) Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2+x_1+1}{x_1^2+1}-\frac{x_2^2+x_2+1}{x_2^2+1}=\left(1+\frac{x_1}{x_1^2+1}\right)-\left(1+\frac{x_2}{x_2^2+1}\right)=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

4) →) Déduisons les variations de f sur l'intervalle : $I=\left]-\infty,-1\right]$

Soient : $x_1\in\left]-\infty,-1\right]$ et $x_2\in\left]-\infty,-1\right]$ deux réels tel que : $x_1\neq x_2$

Alors : $x_1\leq-1$ et $x_2\leq-1$ donc : $x_1x_2\geq1$

Donc : $1-x_1x_2<0$ et Comme : $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

Alors : $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est décroissante sur $I=\left]-\infty,-1\right]$

→) Déduisons les variations de f sur l'intervalle : $J=[-1,1]$

Soient : $x_1\in[-1,1]$ et $x_2\in[-1,1]$ deux réels tel que : $x_1\neq x_2$

Alors : $|x_1|\leq1$ et $|x_2|\leq1$ donc : $|x_1x_2|\leq1$ c'est-à-dire : $-1\leq x_1x_2\leq1$

Donc : $-1\leq -x_1x_2\leq1$ c'est-à-dire : $0\leq1-x_1x_2\leq2$ et comme : $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

Alors : $T(x_1;x_2)\geq0$

D'où : f est croissante sur : $J=[-1,1]$

→) Déduisons les variations de f sur l'intervalle : $K=[1;+\infty[$

Soient : $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$ deux réels tel que : $x_1\neq x_2$

Alors : $x_1\geq1$ et $x_2\geq1$ donc : $x_1x_2\geq1$

Donc : $1-x_1x_2\leq0$ et Comme : $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

Alors : $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est décroissante sur $K=[1;+\infty[$

D'où : son tableau de variation sur $\mathbb{R}$ est :

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	

Exercice 17 : Soit f_m la fonction tel que : $f_m(x)=\frac{(m-1)x+1}{mx-1}$ avec : $m\in\mathbb{R}^*$ (paramètre)

Et (C_{f_m}) sa courbe représentative.

1) Déterminer D_{f_m}

2) Montrer que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$

3) Donner le tableau de variation de f_m en discutant les cas suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}^*$

4) Tracer les courbes (C_{f_1}) et $(C_{f_{-1}})$ dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-1}$

a) Déterminer D_g b) Montrer que : g est paire

b) Vérifier que : $g(x)=f_2(x)$ Pour tout $x\in[0;+\infty[-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solutions : $f_m(x)=\frac{(m-1)x+1}{mx-1}$

1) Détermination de : $D_{f_m}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,mx-1\neq 0\}$

On a : $mx-1=0$ signifie que : $x=\frac{1}{m}$ car $m\in\mathbb{R}^*$

Donc $D_{f_m}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{m}\right\}$

2) Montrons que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$

On a : $f_m(0)=\frac{(m-1)\times 0+1}{m\times 0-1}=-1$ par suite : les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$; $\forall m\in\mathbb{R}^*$

3) Le tableau de variation de f_m suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}^*$

$$\Delta_m=\begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix}=-m+1-m=-2m+1$$

Si : $\Delta_m=-2m+1\succ 0$ c'est à dire : $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ alors : f_m est strictement croissante

OF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty \quad 1/m \quad +\infty$	
$fm(x)$	↗	↗

Si : $\Delta_m = -2m+1 \prec 0$ c'est à dire : $m \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : f_m est strictement décroissante

x	$-\infty \quad 1/m \quad +\infty$	
$fm(x)$	↘	↘

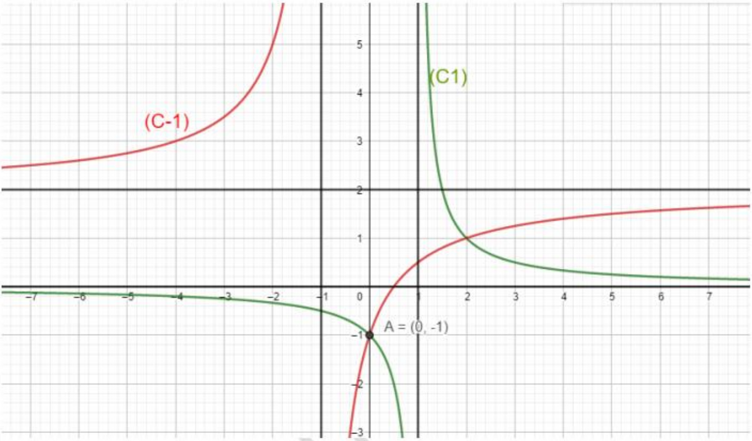
Si : $\Delta_m = -2m+1 = 0$ c'est à dire : $m = \frac{1}{2}$ alors $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\times 0+1}{\frac{1}{2}\times 0-1} = -1$

Alors : f_m est constante

3)Les courbes $\left(C_{f_1}\right)$ et $\left(C_{f_{-1}}\right)$ dans un même repère : $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ et $f_{-1}(x) = \frac{-2x+1}{-x-1} = \frac{2x-1}{x+1}$

x	$-\infty \quad -1 \quad +\infty$	
$f{-}1(x)$	↗	↗

x	$-\infty \quad 1 \quad +\infty$	
$f1(x)$	↘	↘



5) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{|x|+1}{2|x|-1}$

a) Détermination de : D_g

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2|x|-1 \neq 0\}$

$2|x|-1=0 \Leftrightarrow |x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}$

Donc : $D_g = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Montrons que : g est paire

- $\forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\Rightarrow -x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
- $g(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-1}=\frac{|x|+1}{2|x|-1}=g(x)$

b) Vérifions que : $g(x)=f_2(x)$ Pour tout $x \in [0;+\infty[-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

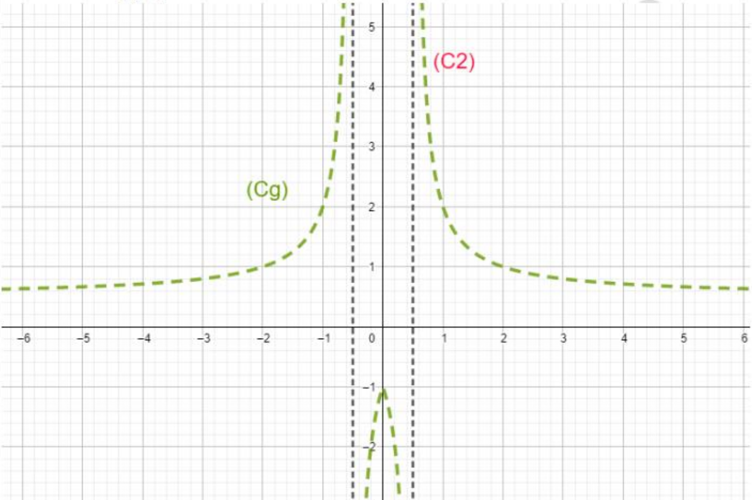
Si : $x \in [0;+\infty[-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ alors : $|x|=x$

$g(x)=\frac{x+1}{2x-1}$ et $f_2(x)=\frac{(2-1)x+1}{2x-1}=\frac{x+1}{2x-1}$

Donc : $g(x)=f_2(x)$ sur $[0;+\infty[-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) Traçage de la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On a : $f_2(x)=\frac{x+1}{2x-1}$



Exercice 18 : Soit f une fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x+2 & ; x\leq 0 \\ f(x)=\sqrt{x+4} & ; x\succ 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) a) Démontrer que : f admet un minimum relatif en -1

b) Démontrer que : f admet un minimum absolu en -1

3) Donner le tableau de variation de f :

4) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Vérifier que : $\forall a\in[2;+\infty[$; $f(a^2-4)=a$

b) Montrer que : f n'est pas majorée

6) a) Déterminer $f\circ f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

b) Étudier les variations de $f\circ f$

Solution :1) $D_1=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 0\}=]-\infty;0]$ et $D_2=\{x\in\mathbb{R}/x+4\geq 0 \text{ et } x\succ 0\}=]0;+\infty[$

Donc : $D_f=D_1\cup D_2=\mathbb{R}$

2) a) Montrons que : $x\in]-\infty;0[$; $f(-1)\leq f(x)$

On a : $f(-1)=(-1)^2+2(-1)+2=1$

Si $x\in]-\infty;0[$; $f(x)-f(-1)=x^2+2x+2-1=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$

Donc : $x\in]-\infty;0[$; $f(-1)\leq f(x)$

Donc : f admet un minimum relatif en -1

b) Si $x\in]-\infty;0]$; $f(x)-f(-1)=x^2+2x+2-1=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$

Donc : $x\in]-\infty;0]$; $f(-1)\leq f(x)$

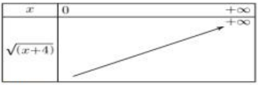
Si $x\in]0;+\infty[$; $x\succ 0\Rightarrow x+4\succ 4\Rightarrow\sqrt{x+4}\succ\sqrt{4}=2\succ 1=f(-1)$

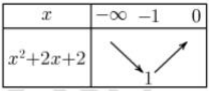
Donc : $\forall x\in]0;+\infty[$; $f(-1)\leq f(x)$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(-1)\leq f(x)$

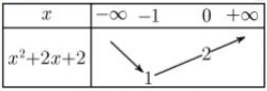
D'où : f admet un minimum absolu en -1

3) tableau de variation de f :



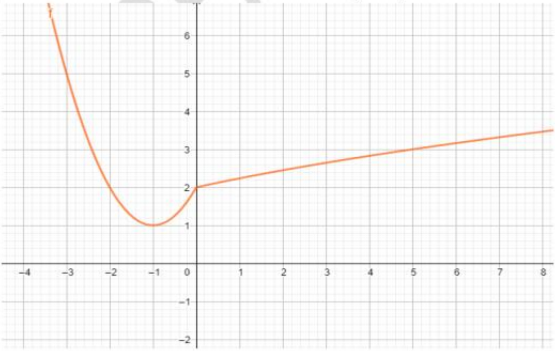


D'où :



PROF: ATMANI NAJIB

4) Traçage de la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) a) Vérifions que : $\forall a\in[2;+\infty[\ ;\ f(a^2-4)=a$

$a\in[2;+\infty[\Rightarrow a\geq 2\Rightarrow a^2\geq 4\Rightarrow a^2-4\geq 0$

On a : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x+2 & ;x\leq 0\\ f(x)=\sqrt{x+4} & ;x\succ 0\end{cases}$

Si : $a=2\Rightarrow a^2-4=0$

$f(a^2-4)=f(0)=0^2+2\times 0+2=2$ Donc : $f(a^2-4)=a$ dans ce cas

Si : $a\succ 2\Rightarrow a^2-4\succ 0$

$f(a^2-4)=\sqrt{a^2-4+4}=\sqrt{a^2}=|a|=a$ car $a\succ 2$

Donc : $f(a^2-4)=a$ dans ce cas

Donc : $\forall a\in[2;+\infty[\ ;\ f(a^2-4)=a$

b) Montrons que : f n'est pas majorée

Supposons que f est majorée

Donc : $\exists M\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in D_f\ :\ f(x)\leq M$©

Soit : a tel que $a\succ M$ et $a\geq 2$:c'est-à-dire : $a\in[2;+\infty[$

D'après la question précédente : on a : $f(a^2-4)=a\Rightarrow f(a^2-4)\succ M$ contradiction avec : ©

Donc : f n'est pas majorée.

6) a) Déterminons $f\circ f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$f\circ f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Si $x\in]-\infty;0]$; $f\circ f(x)=f(f(x))=f(x^2+2x+2)=\sqrt{x^2+2x+2+4}=\sqrt{x^2+2x+6}$ car $x^2+2x+2\succ 0$

Si $x\in]0;+\infty[$; $f\circ f(x)=f(f(x))=f(\sqrt{x+4})=\sqrt{\sqrt{x+4}+4}$ car $\sqrt{x+4}\succ 0$

ATMANI NAJIB

b) Étude des variations de $f\circ f$:

- Puisque f est croissante sur $[-1;+\infty[$ et $f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$ et f est croissante sur $f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$ alors $f\circ f$ est décroissante sur $[-1;+\infty[$
- Puisque f est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et $f(]-\infty;-1])=[1;+\infty[$ et f est croissante sur $[1;+\infty[$ Alors $f\circ f$ est décroissante sur $]-\infty;-1]$

Exercice 19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $E(x)=2025$ 2) $E(3x+2)=10$ 3) $E(2025x^2-x)=-\dfrac{1}{2}$ 4) $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$

5) $E(x)+|x-1|=x$ 6) $E(x^2-2x)=-1$

Solution : Remarque : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall p\in\mathbb{Z}$: $E(x)=p \Leftrightarrow p\le x\prec p+1$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation

1) $x\in S \Leftrightarrow E(x)=2025 \Leftrightarrow 2025\le x\prec 2025+1 \Leftrightarrow 2025\le x<2026 \Leftrightarrow x\in[2025;2026[$

D'où : $S=[2025;2026[$

2) $E(3x+2)=10 \Leftrightarrow 10\le 3x+2<10+1 \Leftrightarrow 10\le 3x+2<11 \Leftrightarrow 8\le 3x<9 \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}\le x<3 \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}\le x<3$

$E(3x+2)=10 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{8}{3};3\right[$

D'où : $S=\left[\dfrac{8}{3};3\right[$

3) $E(2025x^2-x)=-\dfrac{1}{2}$ $S=\varnothing$ car $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\in\mathbb{Z}$

4) $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$

$E\left(\dfrac{1}{x}\right)=3 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $3\le\dfrac{1}{x}\prec 3+1 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $3\le\dfrac{1}{x}\prec 4 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $\dfrac{1}{4}\prec x\le\dfrac{1}{3}$

Finalement : $S=\left]\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$

5) $E(x)+|x-1|=x$

Si : $1\le x$: $E(x)+|x-1|=x \Leftrightarrow E(x)+x-1=x \Leftrightarrow E(x)=1 \Leftrightarrow 1\le x\prec 1+1 \Leftrightarrow 1\le x\prec 2 \Leftrightarrow x\in[1;2[$

D'où : $S_1=[1;2[\cap[1;+\infty[=[1;2[$

Si : $x\prec 1$: $E(x)+|x-1|=x \Leftrightarrow E(x)-x+1=x \Leftrightarrow E(x)=2x-1$

Soit : S_2 l'ensemble des solutions de l'équation

$x\in S_2 \Leftrightarrow E(x)=2x-1 \Leftrightarrow 2x-1\in\mathbb{Z}$ et $2x-1\le x\prec 2x-1+1$

On pose : $2x-1=k\in\mathbb{Z}$ et donc : $x=\dfrac{k+1}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

PROF. ATMANI NAJIB

$2x-1\leq x\prec 2x \Leftrightarrow -1\leq x-2x\prec 0 \Leftrightarrow -1\leq -x\prec 0 \Leftrightarrow 0\prec x\leq 1 \Leftrightarrow 0\prec \frac{k+1}{2}\leq 1 \Leftrightarrow 0\prec k+1\leq 2$

$x\in S_2 \Leftrightarrow 0\prec k+1\leq 2 \Leftrightarrow -1\prec k\leq 1 \Leftrightarrow k=0 \text{ ou } k=1$

Puisque : $x=\frac{k+1}{2}$ alors : $x=\frac{1+1}{2}=1$ et $\cancel{x=\frac{1}{2}}$ car $\frac{1}{2}\geq 1$

D'où : $S_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ Finalement : $S=[1;2[\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$

6) $E\left(x^2-2x\right)=-1$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation

$x\in S \Leftrightarrow E\left(x^2-2x\right)=-1 \Leftrightarrow -1\leq x^2-2x\prec -1+1 \Leftrightarrow -1\leq x^2-2x\prec 0 \Leftrightarrow 0\leq x^2-2x+1 \text{ et } x^2-2x\prec 0$

$\Leftrightarrow 0\leq (x-1)^2 \text{ et } x^2-2x\prec 0 \Leftrightarrow x(x-2)\prec 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 20 : 1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\leq n \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n+1\right[$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\prec n \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n\right[$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\geq n \Leftrightarrow x\in\left[n;+\infty\right[$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\succ n \Leftrightarrow x\in\left[n+1;+\infty\right[$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $E(x-2)\leq 0$ b) $E(x+1)\prec 0$ c) $4E(x)+20\leq 0$ d) $E(x)\geq 2023$ e) $E(x)>2023$

f) $20E(x)-40480>0$ g) $\left|E(2x)\right|\leq 10$

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\leq n \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n+1\right[$

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$) Montrons que : $E(x)\leq n \Rightarrow x\in\left]-\infty;n+1\right[$

Supposons que : $E(x)\leq n$ et comme : $x-1\prec E(x)\leq x$

Alors : $x-1\prec E(x)\leq n$ c'est-à-dire : $x-1\prec n$ et par suite : $x\prec n+1$

Donc : $x\in\left]-\infty;n+1\right[$

$\Leftarrow$) Montrons que : $x\in\left]-\infty;n+1\right[\Rightarrow E(x)\leq n$

Supposons que : $x\in\left]-\infty;n+1\right[$ et montrons que : $E(x)\leq n$

On a : $x\in\left]-\infty;n+1\right[$ c'est-à-dire : $x\prec n+1$

On a : aussi : $E(x)\leq x$ donc : $E(x)\leq x\prec n+1$

Alors : $E(x)\prec n+1$ c'est-à-dire : $E(x)\leq n$

PROF: ATMANI NAJIB

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\leq n\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n+1\right[$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\prec n\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n\right[$

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$

$E(x)\prec n\Leftrightarrow E(x)\leq n-1\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n-1+1\right[\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n\right[$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\geq n\Leftrightarrow x\in\left[n;+\infty\right[$

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$) Montrons que : $E(x)\geq n\ \Rightarrow\ x\in\left[n;+\infty\right[$

Supposons que : $E(x)\geq n$ et comme : $E(x)\leq x$

Alors : $n\leq x$ c'est-à-dire : $x\in\left[n;+\infty\right[$

Donc : $E(x)\geq n\ \Rightarrow\ x\in\left[n;+\infty\right[$

$\Leftarrow$) Montrons que : $x\in\left[n;+\infty\right[\ \Rightarrow\ E(x)\geq n$

Supposons que : $x\in\left[n;+\infty\right[$ donc : $x\geq n$

Et comme : $E(x)$ est le plus grand entier relatif intérieur ou égale à x et n est un entier relatif intérieur ou égale à x alors : $E(x)\geq n$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\geq n\Leftrightarrow x\in\left[n;+\infty\right[$

b) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\succ n\Leftrightarrow x\in\left[n+1;+\infty\right[$

$E(x)\succ n\Leftrightarrow\ E(x)\geq n+1\Leftrightarrow x\in\left[n+1;+\infty\right[$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :

a) $E(x-2)\leq 0\quad\Leftrightarrow x-2\in\left]-\infty;0+1\right[\ \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;3\right[$

D'où : $S=\left]-\infty;3\right[\quad E(x+1)\prec 0$

b) $E(x+1)\prec 0\ \Leftrightarrow\ E(x+1)\leq -1\Leftrightarrow x+1\in\left]-\infty;-1+1\right[\ \Leftrightarrow x+1\in\left]-\infty;0\right[\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-1\right[$

D'où : $S=\left]-\infty;-1\right[$

c) $4E(x)+20\leq 0\Leftrightarrow E(x)\leq -5\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-5+1\right[\ \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-4\right[$

D'où : $S=\left]-\infty;-4\right[$

d) d) $E(x)\geq 2023$

$E(x)\geq 2023\quad\Leftrightarrow x\in\left[2023;+\infty\right[$

D'où : $S=\left[2023;+\infty\right[$

e) $E(x)>2023\ \Leftrightarrow\ E(x)\geq 2023+1\Leftrightarrow x\in\left[2024;+\infty\right[$

D'où : $S=\left[2024;+\infty\right[$

f) $20E(x)-40>0\quad\Leftrightarrow E(x)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow E(x)\geq 1\quad\Leftrightarrow\Leftrightarrow x\in\left[1;+\infty\right[$

D'où : $S=\left[1;+\infty\right[$

PROF. ATMANI NAJIB

g) $|E(2x)|\le 10 \Leftrightarrow -10\le E(2x)\le 10 \Leftrightarrow \begin{cases}-10\le E(2x)\\ E(2x)\le 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge -10\\ 2x<10+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -2\\ x<\dfrac{11}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in\left[-2;\dfrac{11}{2}\right[$

D'où : $S=\left[-2;\dfrac{11}{2}\right[$

Exercice 21 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{Z}$; $E\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+E\left(\dfrac{n+2}{4}\right)+E\left(\dfrac{n+4}{4}\right)=n$

3) Montrer que : $\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2$; $E\left(\dfrac{n+m}{2}\right)+E\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)=n$

4) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$; $E\left(\dfrac{n^2}{3}\right)-E\left(\dfrac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\dfrac{2n}{3}\right)$

Solution : 1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$

Soit $n\in\mathbb{N}$: $E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=E\left(\sqrt{n}^2+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}^2\right)=E\left(n+2\sqrt{n^2+n}+n+1\right)$

$=E\left(2n+1+2\sqrt{n^2+n}\right)=2n+1+E\left(2\sqrt{n^2+n}\right)$

D'autre part on a : $n^2+n=n^2+2\times\dfrac{1}{2}n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

Donc : $n^2\le n^2+n\prec\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2$ par suite : $\sqrt{n^2}\le\sqrt{n^2+n}\prec\sqrt{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}$ c'est-à-dire : $n\le\sqrt{n^2+n}\prec n+\dfrac{1}{2}$

Alors : $2n\le 2\sqrt{n^2+n}\prec 2n+1$

Donc : $E\left(2\sqrt{n^2+n}\right)=2n$

Finalement : $E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)==2n+1+2n=\boxed{4n+1}$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{Z}$; $E\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+E\left(\dfrac{n+2}{4}\right)+E\left(\dfrac{n+4}{4}\right)=n$

Soit $n\in\mathbb{Z}$: on peut distinguer les cas suivants :

1ier cas : $\boxed{n=4k}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$E\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+E\left(\dfrac{n+2}{4}\right)+E\left(\dfrac{n+4}{4}\right)=E\left(\dfrac{4k-1}{2}\right)+E\left(\dfrac{4k+2}{4}\right)+E\left(\dfrac{4k+4}{4}\right)$

$=E\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)+E\left(k+\dfrac{1}{2}\right)+E(k+1)=2k-E\left(\dfrac{1}{2}\right)+k+E\left(\dfrac{1}{2}\right)+k+E(1)=2k-0+k+0+k+1$

Donc : $E\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+E\left(\dfrac{n+2}{4}\right)+E\left(\dfrac{n+4}{4}\right)=4k=n$

PROF: ATMANI NAJIB

2^{ier} cas : $\boxed{n=4k+1}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$$E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=E\left(\frac{4k+1-1}{2}\right)+E\left(\frac{4k+1+2}{4}\right)+E\left(\frac{4k+1+4}{4}\right)$$

$$=E(2k)+E\left(k+\frac{3}{4}\right)+E\left(k+\frac{1}{4}+1\right)=2k+k+E\left(\frac{3}{4}\right)+k+1+E\left(\frac{1}{4}\right)=2k+k+0+k+1+0$$

Car : $0\leq\frac{3}{4}\prec1$ donc : $E\left(\frac{3}{4}\right)=0$ et : $0\leq\frac{1}{4}\prec1$ donc : $E\left(\frac{1}{4}\right)=0$

Donc : $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=4k+1=n$

3^{ier} cas : $\boxed{n=4k+2}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$$E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=E\left(\frac{4k+2-1}{2}\right)+E\left(\frac{4k+2+2}{4}\right)+E\left(\frac{4k+2+4}{4}\right)$$

$$=E\left(2k+\frac{1}{2}\right)+E(k+1)+E\left(k+\frac{1}{2}+1\right)=2k+E\left(\frac{1}{2}\right)+k+1+k+1=2k+0+k+1+k+1+0$$

Car : $0\leq\frac{1}{2}\prec1$ donc : $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Donc : $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=4k+2=n$

4er cas : $\boxed{n=4k+3}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$$E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=E\left(\frac{4k+3-1}{2}\right)+E\left(\frac{4k+3+2}{4}\right)+E\left(\frac{4k+3+4}{4}\right)$$

$$=E\left(\frac{4k+2}{2}\right)+E\left(\frac{4k+5}{4}\right)+E\left(\frac{4k+7}{4}\right)=E(2k+1)+E\left(k+1+\frac{1}{4}\right)+E\left(k+1+\frac{3}{4}\right)$$

$$=2k+1+k+1+E\left(\frac{1}{4}\right)+k+1+E\left(\frac{3}{4}\right)=2k+1+k+1+0+k+1+0$$

Donc : $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=4k+3=n$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{Z}$; $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=n$

3) Montrons que : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$; $E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$

Soient : $(n;m)\in\mathbb{N}^2$

1^{ier} cas : $\boxed{n+m=2k}$ avec : $k\in\mathbb{N}\Rightarrow n=2k-m$

$$E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2k}{2}\right)+E\left(\frac{2k-m-m+1}{2}\right)=E(k)+E\left(\frac{2k-2m+1}{2}\right)$$

$$=E(k)+E\left(k-m+\frac{1}{2}\right)=k+k-m+E\left(\frac{1}{2}\right)=2k-m+0=2k-m=\boxed{n}$$

2ier cas : $\boxed{n+m=2k+1}$ avec : $k\in\mathbb{N}\Rightarrow n=2k+1-m$

$$E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2k+1}{2}\right)+E\left(\frac{2k+1-m-m+1}{2}\right)=E\left(k+\frac{1}{2}\right)+E(k-m+1)$$

$$=k+E\left(\frac{1}{2}\right)+k-m+1=2k+0-m+1=2k+1-m=\boxed{n}$$

Finalement : $\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2$; $E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$

4) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$: On peut distinguer les 3 cas suivants :

1ier cas : $\boxed{n=3k}$ avec : $k\in\mathbb{N}^*$

On a : $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{(3k)^2}{3}\right)-E\left(\frac{(3k-1)^2}{3}\right)=E(3k^2)-E\left(\frac{9k^2-6k+1}{3}\right)$

$$E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)==3k^2-E\left(3k^2-2k+\frac{1}{3}\right)=3k^2-3k^2+2k-E\left(\frac{1}{3}\right)=2k$$

Et on a : $E\left(\frac{2n}{3}\right)=E\left(\frac{2\times 3k}{3}\right)=E(2k)=2k$

Donc : si $n=3k$ $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

2ier cas : $\boxed{n=3k+1}$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a : $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{(3k+1)^2}{3}\right)-E\left(\frac{(3k+1-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{9k^2+6k+1}{3}\right)-E(3k^2)$

$$E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)==E\left(3k^2+2k+\frac{1}{3}\right)-3k^2=3k^2+2k+E\left(\frac{1}{3}\right)-3k^2=3k^2+2k+0-3k^2=2k$$

Et on a : $E\left(\frac{2n}{3}\right)=E\left(\frac{2\times(3k+1)}{3}\right)=E\left(\frac{6k+2}{3}\right)=E\left(2k+\frac{2}{3}\right)=2k+E\left(\frac{2}{3}\right)=2k+0=2k$

Donc : si $n=3k+1$ $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

3ier cas : $\boxed{n=3k+2}$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a : $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{(3k+2)^2}{3}\right)-E\left(\frac{(3k+2-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{9k^2+12k+4}{3}\right)-E\left(\frac{9k^2+6k+1}{3}\right)$

$= E\left(3k^2+4k+\frac{4}{3}\right) - E\left(3k^2+2k+\frac{1}{3}\right) = 3k^2+4k+E\left(\frac{4}{3}\right)-3k^2-2k-E\left(\frac{1}{3}\right) = 3k^2+4k+1-3k^2-2k-0 = 2k+1$

Et on a : $E\left(\frac{2n}{3}\right) = E\left(\frac{2\times(3k+2)}{3}\right) = E\left(\frac{6k+4}{3}\right) = E\left(2k+\frac{4}{3}\right) = 2k+E\left(\frac{4}{3}\right) = 2k+1 = 2k+1$

Donc : si $n=3k+2$ $E\left(\frac{n^2}{3}\right) - E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right) = E\left(\frac{2n}{3}\right)$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $E\left(\frac{n^2}{3}\right) - E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right) = E\left(\frac{2n}{3}\right)$

Exercice 22 : Soit la fonction f tel que : $\begin{cases} f(x) = E(x)+\frac{1}{2} & si \quad x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) = x & si \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

1) Montrer que : $E(-x) = -E(x)-1$; $\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

2) Etudier la parité de f

3) En déduire le domaine d'étude de f

4) Simplifier : $f(x)$ si $x \in [0;1[$ et aussi si $x \in [1;2[$

5)Tracer (C_f) la représentation graphique de la fonction f sur : $I =]-2;2[$

6) a) Montrer que : si $E(a)=E(b)$ alors $|a-b| \prec 1$

b) En déduire les solutions de l'équation : $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x)$

Solution : 1) Montrons que : $E(-x) = -E(x)-1$; $\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Soit : $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$; donc : $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Z}$

Donc : $E(x) \prec x \prec E(x)+1$ car $E(x) \neq x$ $(x \notin \mathbb{Z})$

Donc : $-E(x)-1 \prec -x \prec -E(x)$ c'est-à-dire : $-E(x)-1 \prec -x \prec (-E(x)-1)+1$

Or : $-E(x)-1 \in \mathbb{Z}$ car $E(x) \in \mathbb{Z}$

Donc : $E(-x) = -E(x)-1$ $\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

2) Etudions la parité de f

- ✓ Si : $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$; $-x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

$f(-x) = E(-x)+\frac{1}{2} = -E(x)-1+\frac{1}{2} = -E(x)-\frac{1}{2} = -\left(E(x)+\frac{1}{2}\right) = -f(x)$

- ✓ Si : $x \in \mathbb{Z}$; $-x \in \mathbb{Z}$

$f(-x) = -x = -f(x)$

Par suite : f est impaire

3) Le domaine d'étude de f : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

4) a) Simplification de : $f(x)$ si $x \in [0;1[$

Si $x\in[0;1[$: $E(x)=0$ et donc : $\begin{cases} f(x)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} & si\ \ x\in]0;1[\\ f(0)=0 \end{cases}$

a) Simplification de : $f(x)$ si $x\in[1;2[$

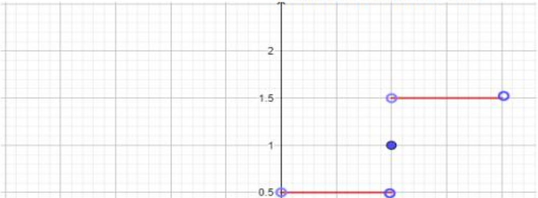
Si $x\in[1;2[$: $E(x)=1$ et donc : $\begin{cases} f(x)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} & si\ \ x\in]1;2[\\ f(1)=1 \end{cases}$

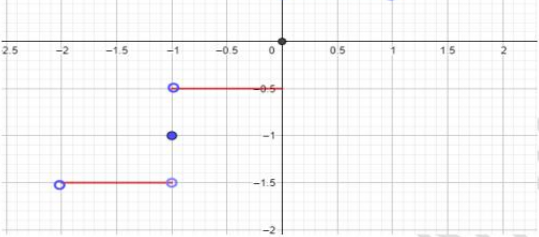
5)Traçage de (C_f) sur : $I=]-2;2[$

Puisque f est impaire alors il suffit de tracer (C_f) sur : $I_1=[0;2[$ et en déduire son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2} & si\ \ x\in]0;1[\\ f(x)=\frac{3}{2} & si\ \ x\in]1;2[\\ f(0)=0\ \ et\ \ f(1)=1 \end{cases}$$

PROF: ATMANI





PROF: ATMANI NAJIB

6) a) Montrons que : si $E(a)=E(b)$ alors $|a-b|\prec 1$

$E(a)=E(b)\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/E(a)=E(b)=n$

$E(a)=n\Leftrightarrow n\le a\prec n+1$ et $E(b)=n\Leftrightarrow n\le b\prec n+1$

Donc : $-n-1\prec -a\le -n$ et $n\le b\prec n+1$

Donc : $n-n-1\le b-a\prec n+1-n$

Donc : $-1\le b-a\prec 1$ c'est-à-dire : $|a-b|\prec 1$

Donc : si $E(a)=E(b)$ alors $|a-b|\prec 1$

b) Déduction des solutions de l'équation : $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f(x)$

$f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f(x)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x)=E(x)+\frac{1}{2} & si \quad x\notin\mathbb{Z} \\ f(x)=x & si \quad x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

1cas : $x\in\mathbb{Z}$ et x impair

Donc : $\frac{x-1}{2}\in\mathbb{Z}$

$f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f(x)\Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=x\Leftrightarrow x-1=2x\Leftrightarrow -1=x$

Donc : $S_1=\{-1\}$

2cas : $x\in\mathbb{Z}$ et x pair

Donc : $\frac{x-1}{2} \notin \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

$$f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x) \Leftrightarrow E\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2} = x \quad \Leftrightarrow E\left(\frac{x-1}{2}\right) = x - \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{2}$$

① $E\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{2x-1}{2} \Rightarrow \frac{2x-1}{2} \in \mathbb{Z}$ On pose : $\frac{2x-1}{2} = k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $x = k + \frac{1}{2}$

Donc : ① devient : $E\left(\frac{k+\frac{1}{2}-1}{2}\right) = k \Leftrightarrow E\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2}\right) = k$

Donc : $k \leq \frac{k-\frac{1}{2}}{2} \prec k+1 \Leftrightarrow 2k \leq k - \frac{1}{2} \prec 2k+2 \Leftrightarrow 0 \leq -k - \frac{1}{2} \prec 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -k \prec \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \prec k \leq -\frac{1}{2}$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-2;-1\}$

Si $k = -1$ alors : $x = -\frac{1}{2}$ impossible

Si $k = -2$ alors : $x = -\frac{3}{2}$ impossible

Donc : $S_2 = \varnothing$

3cas : $x \notin \mathbb{Z}$ par suite : $\frac{x-1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$$f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x) \Leftrightarrow E\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2} = E(x) + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow E\left(\frac{x-1}{2}\right) = E(x) \Rightarrow \left|x - \frac{x-1}{2}\right| \prec 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+1}{2}\right| \prec 1 \Leftrightarrow -1 \prec \frac{x+1}{2} \prec 1 \Leftrightarrow -2 \prec x+1 \prec 2 \Leftrightarrow -3 \prec x \prec 1$$

Donc : $S_3 \subset \left]-3;-1\right[$ (car il Ya des implications)

© Si $x \in \left]-3;-2\right[$ alors : $f(x) = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ et $-3 \prec x \prec -2$

Donc : $-4 \prec x-1 \prec -3$ c'est-à-dire : $-2 \prec \frac{x-1}{2} \prec -\frac{3}{2}$ c'est-à-dire : $E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2$

Donc : $f(x) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ alors on a : $f\left(\frac{x-1}{2}\right) \neq f(x)$

Donc : $\left]-3;-2\right[$ n'est pas solution de l'équation

© Si $x \in \left]-2;-1\right[$ alors : $f(x) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ et $-2 \prec x \prec -1$

Donc : $-3 \prec x-1 \prec -2$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{2} \prec \frac{x-1}{2} \prec -1$ c'est-à-dire : $E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2$

C'est-à-dire : $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ alors on a : $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $]-2;-1[$ est solution de l'équation

© Si $x \in]-1;0[$ alors : $f(x) = -\frac{1}{2}$ et $-1 \prec x \prec 0$

Donc : $-2 \prec x-1 \prec -1$ c'est-à-dire : $-1 \prec \frac{x-1}{2} \prec -\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -1$

C'est-à-dire : $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ alors on a : $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x)$

Donc : $]-1;0[$ est solution de l'équation

Donc : $S_3 =]-2;-1[\cup]-1;0[$

Finalement : $S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-2;0[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB