1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°5 : Généralités sur les fonctions

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x^3-2x-2021}{2x^2-3|x|-2}$ 2) $f(x)=\sqrt{x^2+27}-5\sqrt{3x}$ 3) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}}}-1$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{\sqrt{4x^4+4x^2-3}}$ 5) $f(x)=\sqrt{|x|(|x|-2)}$ 6) $f(x)=\dfrac{2\sin x+\sin x-5\tan x+6}{\sqrt{3}\tan x-1}$

Exercice 2 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m\in\mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de m pour que : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$; déterminer les valeurs de m pour que $\forall x\in\{-2;1\}$ on a : $f(x)=g(x)$

Exercice 3 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x-1 & si\ x\in\left]-\infty;-1\right[\\ f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4} & si\ x\in[-1,1] \\ f(x)=x+1 & si\ x\in\left]1;+\infty\right[\end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Exercice 4 : Soit la fonction numérique : $f(x)=-4x^3+\dfrac{1}{2x}$

1) Déterminer D_f
2) Etudier la parité de f
3) Montrer que : $f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$: Pour tout $x\in D_f$
4) Montrer que la fonction : $g(x)=f(x)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Exercice 5 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^{2026}+2025}{2|x|-6}$

(C_f) La courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice 6 : Soient les deux fonctions : $f(x)=x^2+x-3$ et $g(x)=2x^2+x+1$

1) Comparer les fonctions f et g
2) En déduire les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

Exercice 7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) Déterminer D_f
2) Montrer que $\dfrac{2}{3}$ est le minimum de f sur D_f.
3) Montrer que 2 est le maximum de f sur D_f.

Exercice 8 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f
2) Etudier la parité de f
3) Montrer que f est bornée

Exercice 9 : Soit f une fonction :tel que : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f
2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f Tel que $x_1\neq x_2$.
3) Étudier les variations de f sur $I=\left]0;1\right]$ puis sur $J=\left[1;+\infty\right[$
4) En déduire les variations de f sur D_f
5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Exercice 10 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ et périodique de période $T=1$

Tel que : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ si $x\in\left]0;1\right[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $[-3;3]\cap D_f$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$
2) Calculer : $f(2,5)$; $f(-12,25)$; $f(2025,01)$
3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=\left]k;k+1\right[$ $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 11 : À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

1) a) $f(1,4).....f(2,3)$ b) $f(7,2).....f(7,6)$ c) $f(6,2).....f(6,7)$
2) Peut-on comparer l'image des nombres $2,3$ *et* $7,7$? Justifier.
3) Peut-on comparer l'image des nombres $1,9$ *et* $6,2$? Justifier.

x	-6	-1	1	2	3	4	6	7	8
$f(x)$	-6	0	3	0	-4	0	6	6	7

Exercice 12 : On considère une fonction f dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	3	10	16	25	$+\infty$
f		-2	-15	0	$\frac{13}{7}$	0	

1)Quel est l'ensemble de définition de la fonction f?
2)a)Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty;10\right]$?
b)Quel est le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\infty;10\right]$] ?
3)a) Quel est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$?
b) En déduire le nombre de solution de l'équation $f(x)=2$

Exercice 13 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=5x^3+2x-4$

Déterminer, en justifiant, les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=4x^2-8x+6$

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f
2) Soient : (D) la droite d'équation $(D): y=x-3$ et deux points : $A(1;-1)$ et $B(0;-2)$ et $M(x;y)\in(D)$
a) Tracer la courbe représentative de (C_f) et la droite (D) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
b) Déterminer les coordonnées de M pour que : MA^2+MB^2 soit minimale

Exercice 15 : Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{20-x}+\sqrt{x}$

1) Déterminer : D_f
2) Etudier les variations de f sur $[0,10]$
3) Déduire une comparaison des nombres : $\sqrt{3}+\sqrt{17}$; $\sqrt{2}+\sqrt{18}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{15}$

Exercice 16 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$:

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{3}{2}$
2) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction f
3) Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1\times x_2}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}$

4) En déduire les variations de f sur les intervalles : $I=\left]-\infty,-1\right]$; $J=[-1,1]$ et $K=\left[1;+\infty\right[$

Exercice 17 : Soit f_m la fonction tel que : $f_m(x)=\dfrac{(m-1)x+1}{mx-1}$ avec : $m\in\mathbb{R}^*$ (paramètre)

Et (C_{f_m}) sa courbe représentative.

1) Déterminer D_{f_m}
2) Montrer que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$
3) Donner le tableau de variation de f_m en discutant les cas suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}^*$
4) Tracer les courbes (C_{f_1}) et $(C_{f_{-1}})$ dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
5) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{|x|+1}{2|x|-1}$
a) Déterminer D_g et Montrer que : g est paire
b) Vérifier que : $g(x)=f_2(x)$ Pour tout $x\in\left[0;+\infty\right[-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$
c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 18 : Soit f une fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x+2 & ; x\leq 0 \\ f(x)=\sqrt{x+4} & ; x\succ 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f
2) a) Démontrer que : f admet un minimum relatif en -1
b) Démontrer que : f admet un minimum absolu en -1
3) Donner le tableau de variation de f :
4) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
5) a) Vérifier que : $\forall a\in\left[2;+\infty\right[$; $f(a^2-4)=a$
b) Montrer que : f n'est pas majorée
6) a) Déterminer $f\circ f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$
b) Étudier les variations de $f\circ f$

Exercice 19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $E(x)=2025$ 2) $E(3x+2)=10$ 3) $E(2025x^2-x)=-\dfrac{1}{2}$ 4) $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$

5) $E(x)+|x-1|=x$ 6) $E(x^2-2x)=-1$

Exercice 20 : 1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\leq n\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n+1\right[$
b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\prec n\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;n\right[$
2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\geq n\Leftrightarrow x\in\left[n;+\infty\right[$
b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\succ n\Leftrightarrow x\in\left[n+1;+\infty\right[$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $E(x-2)\leq 0$ b) $E(x+1)\prec 0$ c) $4E(x)+20\leq 0$ d) $E(x)\geq 2023$ e) $E(x)>2023$

f) $20E(x)-40480>0$ g) $|E(2x)|\leq 10$

Exercice 21 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{Z}$; $E\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+E\left(\dfrac{n+2}{4}\right)+E\left(\dfrac{n+4}{4}\right)=n$

3) Montrer que : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$; $E\left(\dfrac{n+m}{2}\right)+E\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)=n$

4) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$; $E\left(\dfrac{n^2}{3}\right)-E\left(\dfrac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\dfrac{2n}{3}\right)$

Exercice 22 : Soit la fonction f tel que : $\begin{cases} f(x)=E(x)+\dfrac{1}{2} & si\ x\notin\mathbb{Z} \\ f(x)=x & si\ x\in\mathbb{Z} \end{cases}$

1) Montrer que : $E(-x)=-E(x)-1$; $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
2) Etudier la parité de f
3) En déduire le domaine d'étude de f
4) Simplifier : $f(x)$ si $x\in\left[0;1\right[$ et aussi si $x\in\left[1;2\right[$
5)Tracer (C_f) la représentation graphique de la fonction f sur : $I=\left]-2;2\right[$
6) a) Montrer que : si $E(a)=E(b)$ alors $|a-b|\prec 1$
b) En déduire les solutions de l'équation : $f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=f(x)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien