1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°6 : Généralités sur les fonctions

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+3}}{x-3}$ 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$

4) $f(x)=\sqrt{6x^3+25x^2+21x-10}$ 5) $f(x)=2026x-5\tan x$

Solution :1) $f(x)=\dfrac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1\neq 0 \;\; et \;\; 3-4x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1\neq 0 \;\; et \;\; x\leq\dfrac{3}{4}\right\}$

$2x^2-3x+1=0$: Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc :

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\dfrac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\dfrac{5+\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\dfrac{1}{2} \;\; et \;\; x\neq 1 \;\; et \;\; x\leq\dfrac{3}{4}\right\}$

$D_f=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right]$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+3}}{x-3}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,4x^2-8x+3\geq 0 \;\; et \;\; x-3\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,4x^2-8x+3\geq 0 \;\; et \;\; x\neq 3\right\}$

Étudions le signe du trinôme : $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{8+4}{2\times4}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{8-4}{8}=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[-\{3\}$

Par suite : $D_f=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^6 - 7x^3 - 8 \neq 0 \;\; et \;\; x \geq 0 \}$

$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ Signifie que : $(x^3)^2 - 7(x^3) - 8 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^3$; nous obtenons l'équation : $X^2 - 7X - 8 = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 81 \succ 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $X_1 = \frac{7-9}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{7+9}{2} = 8$

Donc : $x^3 = -1$ ou $x^3 = 8$.
Equivalent à : $x = -1$ ou $x = 2$

Par suite : $D_f = [0.+\infty[- \{-1; 2\}$

Alors : $D_f = [0; 2[\cup]2; +\infty[$

4) $f(x) = \sqrt{6x^3 + 25x^2 + 21x - 10}$

(On peut remarquer que : -2 est une racine évidente du polynôme : $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10 \geq 0 \}$

On pose : $F(x) = 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$

On remarque que $F(-2) = 0$

Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $F(x) = (x - (-2))Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $F(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

Or, $(x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a = 6 \\ b + 2a = 25 \\ c + 2b = 21 \\ 2c = -10 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a = 6 \\ b = 13 \\ c = -5 \end{cases}$

$F(x) = (x+2)(6x^2 + 13x - 5)$.

Le discriminant de : $6x^2 + 13x - 5$ est : $\Delta = 13^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 289 = 17^2$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2 \times 6} = \frac{-13 - 17}{12} = -\frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2 \times 6} = \frac{-13 + 17}{12} = \frac{1}{3}$

$6x^2 + 13x - 5 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = 2 \times 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (3x-1)(2x+5)$

Donc : $F(x) = (x+2)(3x-1)(2x+5)$

PROF: ATMANI NAJIB

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que : $x=-\frac{5}{2}$: On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left[-\frac{5}{2},-2\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=2026x-5\tan x$

$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 2 : Soit la fonction f définie par: $f(x)=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Donner une interprétation graphique

Solution :1) $f(x)=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ |x+2|-|x-2|\neq 0\}$

$|x+2|-|x-2|=0$ Signifie $|x+2|=|x-2|$ C'est-à-dire : $x+2=x-2$ ou $x+2=-(x-2)$

Signifie $2=-2$ ou $2x=0$

C'est-à-dire : $2=-2$ (pas de solution) ou $x=0$

Signifie : $x=0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2)Etude de la parité de la fonction f

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=\frac{(-x)^3}{|-x+2|-|-x-2|}=\frac{-x^3}{|-(x-2)|-|-(x+2)|}=\frac{-x^3}{|x-2|-|x+2|}$ Car $|-x|=|x|$

$f(-x)=\frac{-x^3}{-(-|x-2|+|x+2|)}=\frac{x^3}{-|x-2|+|x+2|}=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3)Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative

Exercice 3 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+3x+5$

1)a) Démontrer que f est majorée.

b) Est ce que f admet une valeur maximale ?

2) Démontrer que f est non minorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

1)a) $f(x)=-x^2+3x+5=-(x^2-3x)+5$ $\qquad x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

Donc on a : $f(x)=-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+5=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+5=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$

Donc : $f(x)-\frac{29}{4}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\le 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\le\frac{29}{4}$

Alors : f est majorée par $\frac{29}{4}$

b) On a : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{29}{4}$ donc : $f(x)\le f\left(\frac{3}{2}\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : f admet une valeur maximale c'est : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{29}{4}$

2) Démontrons que f est non minorée.

Supposons f minorée donc : $\exists m\in\mathbb{R}: m\le f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}: m\le-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{29}{4}-m$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\le\sqrt{\frac{29}{4}-m}$ (On peut toujours supposer $\frac{29}{4}\ge m$)

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:\left|x-\frac{3}{2}\right|\le\sqrt{\frac{29}{4}-m}$

Donc on a : $-\sqrt{\frac{29}{4}-m}\le x-\frac{3}{2}\le\sqrt{\frac{29}{4}-m}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}-m}\le x\le\sqrt{\frac{29}{4}-m}+\frac{3}{2}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ absurde car on prend par exemple :

$x=\sqrt{\frac{29}{4}-m}+2025$ et $x>\sqrt{\frac{29}{4}-m}+\frac{3}{2}$

Donc f est non minorée

Exercice 4 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et périodique de période $T=1$

Tel que : $f(x)=\frac{x}{x+1}$ si $x\in[0;1[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $[-3;3]\cap D_f$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(0,5)$; $f(-10,5)$; $f(2027,01)$

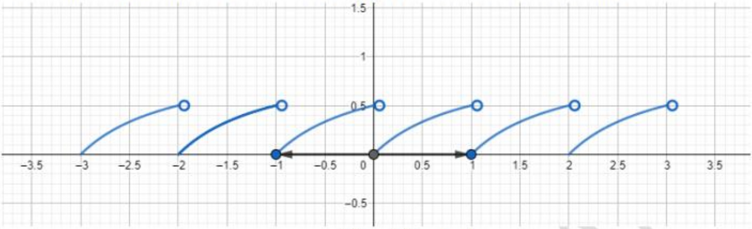
3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[\ k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;1[$: :la courbe (C_f) c'est une portion d'une hyperbole

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]\cap D_f$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) → Puisque : $0,5\in[0;1[$ Alors $f(0,5)=\frac{0,5}{0,5+1}=\frac{0,5}{1,5}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

$\rightarrow f(-10,5)=f(-11+0,5)=f(-11\times1+0,5)=f(0,5)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(-10,5)=f(0,5)$ et puisque : $0,5\in[0;1[$

Alors : $f(-10,5)=f(0,5)=\frac{1}{3}$

$\rightarrow f(2027,01)=f(2027+0,1)=f(2027\times1+0,1)=f(0,1)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(2027,01)=f(0,1)$ et puisque : $0,1\in[0;1[$

Alors : $f(2027,01)=f(0,1)=\frac{0,1}{0,1+1}=\frac{0,1}{1,1}=\frac{1}{11}$

3) L'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[$ $k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[k;k+1[\Leftrightarrow k\le x<k+1$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\le x-k<1\Leftrightarrow f(x-k)=\frac{x-k}{x-k+1}$

Or : f est périodique de période $T=1$ alors : $f(x-k)=f(x-k\times1)=f(x)$

Donc : $f(x)=\frac{x-k}{x-k+1}$ si $x\in I_k=[k;k+1[$; $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 5 : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+4x-1$

1)Préciser le domaine de définition de g

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

3)Etudier la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$

4)Dresser le tableau de variation de g

5)En déduire les extrémums de g sur $\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJ

PROF: ATMANI NAJIB

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=x-1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)>f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution :1) g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(-x_1^2+4x_1-1)-(-x_2^2+4x_2-1)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_1^2+x_2^2+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1^2-x_2^2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(-x_1-x_2+4)}{x_1-x_2}=-x_1-x_2+4$$

Donc : $\boxed{T(x_1;x_2)=-x_1-x_2+4}$

3)a) Etude de la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\geq2$ et $x_2\geq2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>4$

Donc $-x_1-x_2<-4$ par suite : $-x_1-x_2+4<0$

Donc $T(x_1;x_2)<0$ d'où : g est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de g sur : $J=]-\infty;2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$

Alors : $x_1\leq2$ et $x_2\leq2$ et $x_1\neq x_2$ cela implique $x_1+x_2<4$

Donc $-x_1-x_2>-4$ par suite : $-x_1-x_2+4>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$

D'où : g est strictement croissante sur $]-\infty;2]$

4) Résumé : tableau de variation : On a : $g(2)=-2^2+4\times2-1=-4+8-1=3$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	3	↘

5) $g(2)=3$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

PROF: ATMANI NAJIB

Les points d’intersection A et B de la courbe (C_g) avec l’axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l’´équation: $g(x)=0$.

$g(x)=0$ Signifie $-x^2+4x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times(-1)=16-4=12>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}{-2}=2-\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{3}\right)}{-2}=2+\sqrt{3}$$

Donc les points d’intersection de la courbe (C_g) avec l’axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{3};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{3};0\right)$

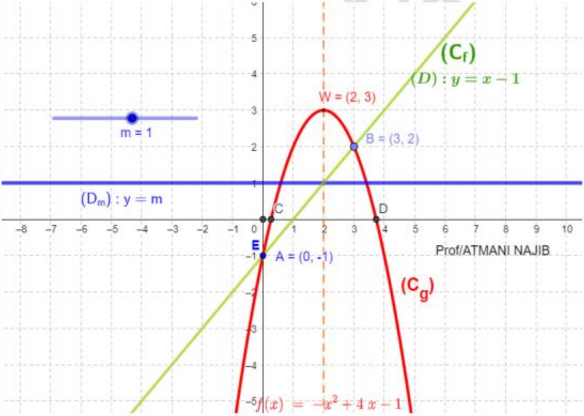
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l’axe des ordonnées

Le point d’intersection de la courbe (C_f) avec l’axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=-0^2+4\times0-1=-1$

Donc le point d’intersection de la courbe (C_f) avec l’axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

7)



8) a) Résolution graphique de l’équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d’intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=3$ donc $S=\{0;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2+4x-1=x-1$ c'est-à-dire : $-x^2+3x=0$

Signifie : $x(-x+3)=0$

Signifie : $-x+3=0$ ou $x=0$
C'est-à-dire : $x=3$ ou $x=0$

Donc : $S=\{0;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)>f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]0;3[$

Donc $S=]0;3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)>f(x)$:

$g(x)>f(x)$ Signifie $-x^2+4x-1\succ x-1$

C'est-à-dire : $-x^2+3x>0$

Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=]0;3[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$
$x^2-4x+m+1=0$ Signifie $m=-x^2+4x-1$

Signifie : $m=g(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si: $m>3$ l'équation n'admet pas de solution
Si: $m=3$ il y'a une solution c'est : x = 2
Si: $m<3$ il y'a deux solutions

Exercice 6 : Soit f une fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} (1)\ f\ est\ non\ constante \\ \forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)} \end{cases}$$

1)Montrer que : $f(0)(f(0)-1)(f(0)+1)=0$

2)Montrer que : $(f(0)-1)(f(0)+1)\neq 0$

3)Déduire que f est impaire

4) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\dfrac{2x}{1+x^2}\leq 1$

5)Déduire que f est majoré par 1 et minoré par -1

PROF. ATMANI NAJIB

Solution : 1) Montrons que : $f(0)\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)=0$

Puisque : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $f(0)=f(0+0)=\dfrac{f(0)+f(0)}{1+f(0)\times f(0)}\Leftrightarrow f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+f^2(0)}\Leftrightarrow f(0)\left(1+f^2(0)\right)=2f(0)$

$\Leftrightarrow f^3(0)+f(0)-2f(0)=0\Leftrightarrow f^3(0)-f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)-1^2\right)=0$

$\Leftrightarrow f(0)\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)=0$

2) Montrons que : $\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)\neq 0$

On va raisonner par l'absurde :

On suppose que : $\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)=0$ essayons de trouver une contradiction avec la faite que f est non constante.

$\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)=0\Rightarrow f(0)-1=0$ ou $f(0)+1=0$

→Si : $f(0)-1=0\Rightarrow f(0)=1$ essayons de trouver une contradiction

Comme on a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=f\left(0+(x+y)\right)=\dfrac{f(0)+f(x+y)}{1+f(0)\times f(x+y)}$

$\Rightarrow\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{1+f(x+y)}{1+f(x+y)}=1\Rightarrow f(x+y)=1\ ;\ \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

⇒f est constante : Contradiction

Donc : $f(0)-1\neq 0$

→Si : $f(0)+1=0\Rightarrow f(0)=-1$ essayons de trouver une contradiction

Comme on a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=f\left(0+(x+y)\right)=\dfrac{f(0)+f(x+y)}{1+f(0)\times f(x+y)}$

$\Rightarrow\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{-1+f(x+y)}{1-f(x+y)}=\dfrac{-\left(1-f(x+y)\right)}{1-f(x+y)}=-1\Rightarrow f(x+y)=-1\ ;\ \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

⇒f est constante : Contradiction

Donc : $f(0)+1\neq 0$

Conclusion : $\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)\neq 0$

3)Déduisons que f est impaire

On a : $f(0)\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)=0$ et $\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)\neq 0$

Je peux déduire d'ici que : $\left[f(0)=0\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

Montrons que : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(-(x+y)) = -f(x+y)$

On a : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(0) = f(x+(-x)) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)\times f(-x)}$

$\Rightarrow 0 = \dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)\times f(-x)} \Rightarrow f(x)+f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$

Soit : $y\in\mathbb{R}$: $f(0) = f(y+(-y)) = \dfrac{f(y)+f(-y)}{1+f(y)\times f(-y)}$

$\Rightarrow 0 = \dfrac{f(y)+f(-y)}{1+f(y)\times f(-y)} \Rightarrow f(y)+f(-y) = 0 \Rightarrow f(-y) = -f(y)$

Donc : $\forall y\in\mathbb{R} : f(-y) = -f(y)$

Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(-(x+y)) = f((-x)+(-y)) = \dfrac{f(-x)+f(-y)}{1+f(-x)\times f(-y)} = \dfrac{-f(x)-f(y)}{1+(-\times-)f(x)\times f(y)}$

Donc : $f(-(x+y)) = \dfrac{-f(x)-f(y)}{1+(-\times-)f(x)\times f(y)} = -\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)} = -f(x+y)$

Donc : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(-(x+y)) = -f(x+y)$

Conclusion : f est impaire

4) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ; \dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ $1-\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} \ge 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ ; \dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$

5)Déduire que f est majoré par 1 et minoré par -1

Montrons que : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le f(x+y) \le 1$

→Montrons que : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y) \le 1$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Comme $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $f(x+y) = f\left(\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{1+f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\times f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)} = \dfrac{2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{1+\left(f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2} \le 1$

car : $\forall X\in\mathbb{R}\ ; \dfrac{2X}{1+X^2} \le 1$ en particulier pour : $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = X$

→Montrons que : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le f(x+y)$

PROF: ATMANI NAJIB

On sait que : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(-(x+y)) = -f(x+y)$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Comme $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $f(-(x+y)) = f\left(-\dfrac{x+y}{2}+-\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)+f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)}{1+f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)\times f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)}=\dfrac{2f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)}{1+\left(f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2}\leq 1$

Alors : $f(-(x+y))\leq 1$

Alors : $-f(x+y)\leq 1$ Donc : $f(x+y)\geq -1$

Conclusion : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq f(x+y)\leq 1$

C'est-à-dire : f est majoré par 1 et minoré par -1

Exercice 7 : Soient les deux fonctions : $f(x)=x^2+x-3$ et $g(x)=x^2+6x-1$

1) Comparer les fonctions f et g

2) En déduire les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

Solution : 1) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$\rightarrow f(x)-g(x)=x^2+x-3-x^2-6x+1=-5x-2$

Cherchons le signe de : $f(x)-g(x)=-5x-2$

$f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow -5x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-\dfrac{2}{5}\right]$

Donc : $f\geq g$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{2}{5}\right]$ et $f<g$ sur $\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right]$

2) Déduisons les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g :

Par conséquent : (C_f) est confondue avec (C_g) pour : $x=-\dfrac{2}{5}$

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\infty;-\dfrac{2}{5}\right[$

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right]$

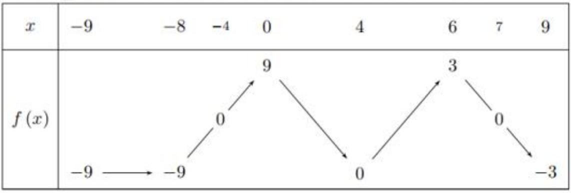
Exercice 8 : À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

1) a) $f(4,3)\ldots\ldots f(5,5)$ b) $f(-8,7)\ldots\ldots f(-8,3)$ c) $f(1)\ldots\ldots f(3)$

2) Peut-on comparer l'image des nombres $-5,4\ et\ 4,4$? Justifier.

3) Peut-on comparer l'image des nombres $-0,1\ et\ 4,9$? Justifier.

PROF: ATMANI NAJIB



Solution :1) a) $f(4{,}3) < f(5{,}5)$) car 4,3 < 5,5 et f est croissante sur [4 ; 6].

b) $f(-8{,}7) = f(-8{,}3)$ car -8,7< -8,3 et f est constante sur [-9 ; -8].

c) $f(1) > f(3)$ car 1 < 3 et f est décroissante sur [0 ; 4].

2) $f(-5{,}4) < f(4{,}4)$ car d'après le signe de la fonction $f(-5{,}4) < 0$ et $f(4{,}4) > 0$ (par contre, on ne peut pas utiliser le sens de variation qui change sur l'intervalle [-5,4 ; 4,4]).

3) On ne peut pas comparer l'image des nombres $-0{,}1$ *et* $4{,}9$ car la fonction f n'est pas monotone (elle change de sens de variation) sur [-0,1 ; 4,9].

Exercice 9 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^3+2}$:

1) Soient : $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2) = \dfrac{2 - x_1 \times x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)}$

2) En déduire les variations de f sur $I = [0,1]$ et sur $J = [1;+\infty[$

3) Monter que : la fonction f est bornée sur $[2,4]$

Solution :1) Soients : $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^3+2} - \frac{x_2}{x_2^3+2} = \frac{2(x_1-x_2) - x_1x_2(x_1{}^2 - x_2{}^2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)} = \frac{(x_1-x_2)(2 - x_1x_2(x_1+x_2))}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)}$$

Donc : $T(x_1;x_2) = \dfrac{2 - x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)}$

2) →Soient : $x_1 \in [0,1]$ et $x_2 \in [0,1]$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Alors : $0 \leq x_1 \leq 1$ et $0 \leq x_2 \leq 1$ donc : $0 \leq x_1x_2 \leq 1$ et $0 \leq x_1 + x_2 \leq 2$

Donc : $0 \leq x_1x_2(x_1+x_2) \leq 2$ c'est-à-dire : $2 - x_1x_2(x_1+x_2) \geq 0$

Comme : $x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq 0$ alors : $(x_1^3+2)(x_2^3+2) > 0$

Par suite : $T(x_1;x_2) = \dfrac{2 - x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)} \geq 0$ car $(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4) > 0$ et $4 > 0$

D'où : f est croissante sur $I = [0,1]$

PROF: ATMANI NAJIB

→Soient : $x_1 \in [1;+\infty[$ et $x_2 \in [1;+\infty[$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Alors : $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ et $x_1 \neq x_2$ donc : $x_1x_2 > 1$ et $x_1 + x_2 > 2$

Donc : $x_1x_2(x_1 + x_2) > 2$ c'est-à-dire : $2 - x_1x_2(x_1 + x_2) < 0$

Comme : $x_1 \geq 1$ et $x_1 \geq 1$ alors : $(x_1^3 + 2)(x_2^3 + 2) > 0$

Par suite : $T(x_1;x_2) = \dfrac{2 - x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1^3 + 2)(x_2^3 + 2)} < 0$

D'où : f est décroissante sur $J = [1;+\infty[$

3) Montrons que : la fonction f est bornée sur $[2,4]$

Soit : $x \in [2,4]$ donc : $2 \leq x \leq 4$ et comme f est décroissante sur $J = [1;+\infty[$

Alors : $f(4) \leq f(x) \leq f(2)$ et comme : $f(2) = \dfrac{2}{2^3 + 2} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ et $f(4) = \dfrac{2}{4^3 + 2} = \dfrac{2}{66} = \dfrac{1}{33}$

Alors : $\dfrac{1}{33} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{5}$

Donc :la fonction f est bornée sur $[2,4]$

Exercice 10 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{5x - 11}{4x - 4}$ et $g(x) = x^2 - 2x - 1$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) a) Déterminer a ; b et c tel que : $x \in D_f$: $g(x) - f(x) = \dfrac{(x+1)(ax^2 + bx + c)}{4x - 4}$

b) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

5)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère en précisant les points d'intersections

6) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[-1,1]$; $[1;+\infty[$

7)a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x) \succ f(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \times g(x) \geq 0$

PROF: ATMANI NAJIB

8) Soit la fonction définie par : $h(x) = |g(x)|$

Tracer La courbes représentatives (C_h) de h dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (avec une autre couleur)

Solution :1) $f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$

En générale si : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre

---

$W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre :

$W\left(1;\frac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = 1$ et $y = \frac{5}{4}$

Tableau de variations de f :

$f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$ on a : $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -20 + 44 = 24 \succ 0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]1\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 1[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

2) $g(x) = x^2 - 2x - 1$; g est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

$\left(g(x) = ax^2 + bx + c\right)$ On a : $a = 1$ et $b = -2$ et $c = -1$

Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times 1} = 1$ et $\beta = g(1) = (1)^2 - 2\times(1) - 1 = -2$

la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$; $S(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$. C'est-à-dire : $x = 1$

b) Tableau de variations de g : On a $a = 1 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	-2	↗

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation : $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-11}{4x-4} = 0 \Leftrightarrow 5x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{5}$

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $C\left(\frac{11}{5};0\right)$

PROF: ATMANI NAJIB

b) Les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times1}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$A(1+\sqrt{2};0)$ et $B(1-\sqrt{2};0)$.

4) a) Soit $x\in D_f$: $g(x)-f(x)=x^2-2x-1-\dfrac{5x-11}{4x-4}=\dfrac{4x^3-12x^2-x+15}{4x-4}=\dfrac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}$

Donc : $a=4$; $b=-16$; $c=15$

b) Détermination des points d'intersections de (C_f) et (C_g) :

$M(x;y)\in(C_f)\cap(C_g)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}=0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2-16x+15)=0 \Leftrightarrow 4x^2-16x+15=0$ ou $x=-1$

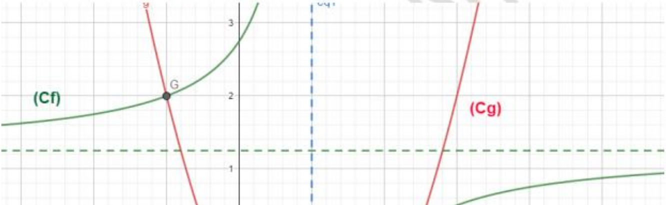
$\Delta=b^2-4ac=(-16)^2-4\times4\times15=16>0$

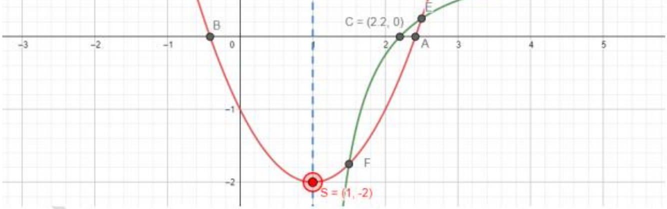
$x_1=\dfrac{-(-16)+\sqrt{16}}{2\times4}=\dfrac{16+4}{8}=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-16)-\sqrt{16}}{2\times4}=\dfrac{16-4}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\left\{E\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{4}\right);F\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{7}{4}\right);G(-1;2)\right\}$

5)Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

a) $f(x)=\dfrac{5x-11}{4x-4}$: (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=\dfrac{5}{4}$





6) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[-1,1]$; $[1;+\infty[$

$g([-1,1])=[-2,2]$ et $g([1;+\infty[)=[-2;+\infty[$

7)a) Résolution graphique de l'inéquation : $g(x)\succ f(x)$

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Donc : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

b) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\times g(x)\geq 0$

$f(x)\times g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \;\; et \;\; g(x)\geq 0$ ou $f(x)\leq 0 \;\; et \;\; g(x)\leq 0$

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ La courbe (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$

$f(x)\geq 0 \;\; et\, g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(\left]-\infty;1\right[\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[\right)\cap\left(\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[\right)$

$f(x)\geq 0 \;\; et\, g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};1\right[$

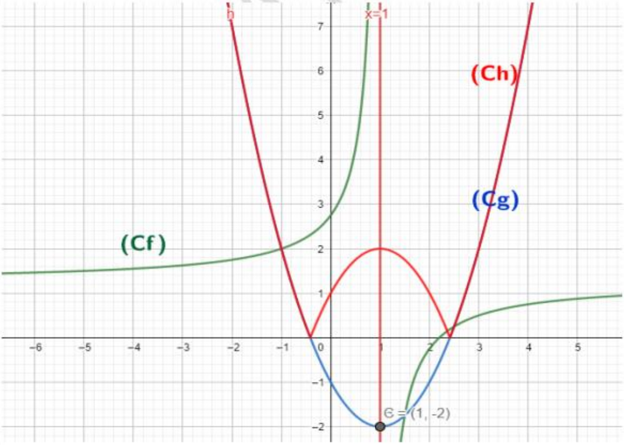
De la même façon : $f(x)\leq 0 \;\; et\, g(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

Donc : $f(x)\times g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[\cup\left]1;1+\sqrt{2}\right]$

8) On a : $h(x)=|g(x)|$ donc : $\begin{cases} h(x)=g(x) & si \;\; g(x)\geq 0 \\ h(x)=-g(x) & si \;\; g(x)\leq 0 \end{cases}$

Donc : Les courbes (C_h) et (C_g) sont confondues si $g(x)\geq 0$ c'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses et Les courbes (C_h) et (C_g) sont symétriques si $g(x)\leq 0$ C'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses (voir figure)

ATMANI NAJIB



Exercice 11 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-4x+6\right)$ et $g(x)=\sqrt{x}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f)de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

3) a) Vérifier que : $g(1)=f(1)$ et $g(4)=f(4)$

b) Tracer Les courbes représentatives (C_f)et (C_g)dans le même repère en précisant les points d'intersections

4) Déterminer graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;4]$; $[2;+\infty[$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2-4x+3\left(2-\sqrt{x}\right)<0$

Solution :) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+2$; f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

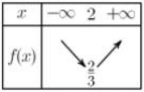
$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a :$a=\frac{1}{3}$ et $b=-\frac{4}{3}$ et $c=2$ donc : $\alpha=-\frac{-\frac{4}{3}}{2\frac{1}{3}}=2$ $f(2)=\frac{2}{3}$

La courbe(C_f) c'est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$; $S\left(2;\frac{2}{3}\right)$ et d'axe de symétrie la droite

TMANI NAJIB

$x = \alpha$. C'est-à-dire : $x = 2$

Tableau de variations de f : On a $a = \frac{1}{3} > 0$ donc :



1) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation : $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times6 = 16 - 24 = -8 < 0$: Pas de solutions

Donc : la courbe (C_f) ne coupe pas l'axe des abscisses

b) Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées :

PROF: ATMANI NAJIB

$f(0) = \frac{1}{3}(0^2 - 4\times0 + 6) = 2$ $x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times1} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$

Donc : Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $A(0;2)$

3) a) Vérifions que : $g(1) = f(1)$ et $g(4) = f(4)$

$f(1) = \frac{1}{3}(1^2 - 4\times1 + 6) = 1$ et $g(1) = \sqrt{1} = 1$

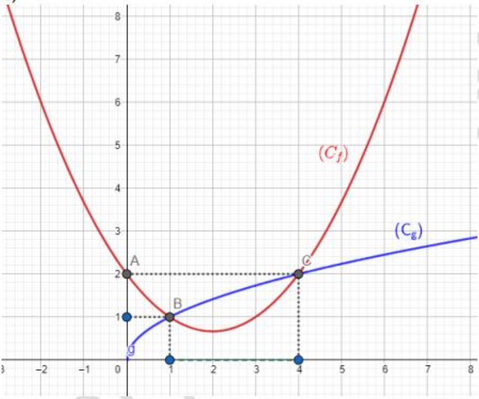
Donc : $g(1) = f(1)$

$f(4) = \frac{1}{3}(4^2 - 4\times4 + 6) = \frac{1}{3}(16 - 16 + 6) = 2$ et $g(1) = \sqrt{4} = 2$

Donc : $g(4) = f(4)$

Graphiquement : (C_f) et (C_g) se coupent et les points : $B(1;1)$ et $C(4;2)$

b)



4) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;4]$; $[4;+\infty[$

$g([1;4]) = [1;2]$ et $g(\,[4;+\infty[) = [2;+\infty[$

5) Résolvons graphiquement l'inéquation : $x^2 - 4x + 3\left(2-\sqrt{x}\right) < 0$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+$; $x^2 - 4x + 3\left(2-\sqrt{x}\right) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 - 3\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 < 3\sqrt{x}$

$x^2 - 4x + 3\left(2-\sqrt{x}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x^2 - 4x + 6\right) < \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Graphiquement la courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in]1;4[$

Donc : $S =]1;4[$

Exercice 12 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{|x|}{x^3 + x}$

1) a) Déterminer D_f b) Etudier la parité de f

2) Montrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et en déduire les variations de f dans $]-\infty;0[$

3) Montrer que : $0 < f(x) < 1$; $\forall x \in]0;+\infty[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ tel que : $g(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 2}$

a) Montrer que : $g(x) = (f \circ f)(x)$; $\forall x \in]0;+\infty[$

b) En déduire les variations de g dans $]0;+\infty[$

Solution :1) a) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^3 + x \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x\left(x^2+1\right) \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\right\} = \mathbb{R}^*$

b) Etudions la parité de f

- si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^3 + (-x)} = \dfrac{|x|}{-x^3 - x} = -\dfrac{|x|}{x^3 + x} = -f(x)$ C'est à dire : $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) Montrons que f est décroissante sur $]0;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{|x|}{x^3 + x} = \dfrac{x}{x^3 + x} = \dfrac{1}{x^2 + 1}$: $\forall x \in]0;+\infty[$

Soient $x_1 \in]0;+\infty[$ et $x_2 \in]0;+\infty[$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2 + 1} - \frac{1}{x_2^2 + 1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = -\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$$

Donc : $T(x_1;x_2) = \dfrac{-(x_1 + x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$

Puisque : $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ alors : $x_1 + x_2 > 0$ et puisque : $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) > 0$

Alors : $T(x_1;x_2) = \dfrac{-(x_1 + x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} < 0$

Par suite f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et comme f est une fonction impaire

Alors : f est croissante sur $]-\infty;0[$

3) Montrons que : $0 < f(x) < 1$; $\forall x \in]0;+\infty[$

Soit : $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{|x|}{x^3 + x} = \dfrac{x}{x^3 + x} = \dfrac{1}{x^2 + 1} > 0$

$1 - f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1} = \dfrac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} > 0$ donc : $f(x) < 1$

Par suite : $0 < f(x) < 1$; $\forall x \in]0;+\infty[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ tel que : $g(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 2}$

a) Montrons que : $g(x) = (f \circ f)(x)$; $\forall x \in]0;+\infty[$

Soit : $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{(f(x))^2 + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1\ )^2}{(x^2 + 1\ )^2 + 1} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

Alors : $g(x) = (f \circ f)(x)$; $\forall x \in]0;+\infty[$

b) Déduction des variations de g dans $]0;+\infty[$

On a : $g = f \circ f$ sur $]0;+\infty[$

Puisque f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et $f(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$ et f est décroissante sur $]0;+\infty[$ alors

$f \circ f$ est croissante sur $]0;+\infty[$

Exercice 13 : Soient f et g deux fonctions numériques définies par : $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x)$ et $g(x)=\sqrt{x}$

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Calculer $f(0)$; $f(2)$; $f(4)$ et $g(4)$

3)Tracer Les courbes représentatives (C_f)et (C_g)dans le même repère

4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)} \le 1$

3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=\frac{1}{4}\left(x-2\sqrt{x}\right)$

a) Vérifier que : $h(x)=(f \circ g)(x)$; $\forall x \in [0;+\infty[$

b) En déduire les variations de h sur$[0,1]$

Solution :1) $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$; $D_f=\mathbb{R}$; On a $a=\frac{1}{4}>0$; $b=-\frac{1}{2}$ et $c=0$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc : $-\frac{b}{2a}=1$ et $\left(f(1)=-\frac{1}{4}\right)$

Donc la courbe(C_f) c'est une parabole de sommet $S\left(1;-\frac{1}{4}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	-1		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

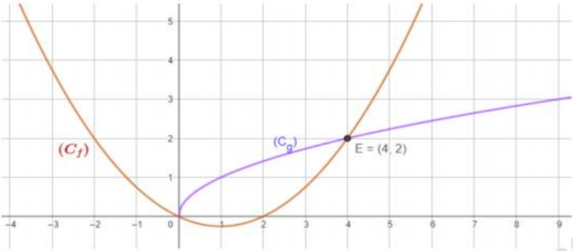
2) Calculons : $f(0)$; $f(2)$; $f(4)$ et $g(4)$

$f(0)=0$; $f(2)=0$; $f(4)=2$ et $g(4)=2$

3)Traçage des courbes représentatives (C_f)et (C_g)dans le même repère

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	

$g(x)=\sqrt{x}$



4) Résolution graphique de l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)} \le 1$

$D_E = \{x \in \mathbb{R} / x \in [0;+\infty[\ \ et \ x^2 - 2x \ne 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \in [0;+\infty[\ \ et \ x \ne 0 \ \ et \ x \ne 2\ \} =]0;2[\cup]2;+\infty[$

SI $x \in]0;2[$: $f(x) < 0$ et $g(x) > 0$ donc : $\frac{g(x)}{f(x)} < 0$ donc : $\frac{g(x)}{f(x)} \le 1$

Donc : $]0;2[\subset S$ avec S : l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)} \le 1$

SI $x \in]2;+\infty[$: $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ donc :: $\frac{g(x)}{f(x)} \le 1 \Leftrightarrow g(x) \le f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $[4+\infty[$

Donc : $[4+\infty[\subset S$

Finalement : $S =]0;2[\cup [4;+\infty[$

3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right)$

a) Vérifions que : $h(x) = (f \circ g)(x)$; $\forall x \in [0;+\infty[$

Soit $x \in [0;+\infty[$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right) = h(x)$

Donc : $h(x) = (f \circ g)(x)$; $\forall x \in [0;+\infty[$

b) Déduisons les variations de h sur $[0,1]$

Puisque g est croissante sur $[0,1]$ et $g([0,1]) = [0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ alors h est décroissante sur $[0,1]$

Exercice 14 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x - E(x)}$

1) Calculer : $f(1)$; $f(4,25)$; $f(-3,6)$

2) Déterminer : D_f

PROF: ATMANI NAJIB

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$

Solution : 1) Calculons : $f(1)$; $f(4,25)$; $f(-3,25)$

$f(1) = -1 + \sqrt{1 - E(1)} = -1 + \sqrt{1-1} = -1$

$f(4,25) = -4,25 + \sqrt{4,25 - E(4,25)} = -4,25 + \sqrt{4,25 - 4} = -4,25 + \sqrt{0,25} = -4,25 + 0,5 = -3,75$

$f(-3,6) = 3,6 + \sqrt{-3,6 - E(-3,6)} = 3,6 + \sqrt{-3,6 - (-4)} = 3,6 + \sqrt{0,4}$

2) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - E(x) \ge 0\ \} = \mathbb{R} - \{0\}$

On sait que : $x - 1 \prec E(x) \le x$ donc : $0 \le x - E(x)$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x+\sqrt{x-E(x)}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-E(x)}=x$

On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x-E(x) \prec 1$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-E(x)}=x \Rightarrow 0 \leq x \prec 1 \Rightarrow 0 \leq x \prec 1 \Rightarrow E(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=x \Rightarrow x=x^2$

$\Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x-1=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1$

Inversement : $f(0)=-0+\sqrt{0-E(0)}=0$ et $f(1)=-1+\sqrt{1-E(1)}=-1 \neq 0$

Donc : $S=\{0\}$

Exercice 15 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=(x-E(x))^2$

1) Montrer que f est bornée
2) a) Vérifier que 1 est une période pour la fonction f
b) En déduire le domaine d'étude de f

3) a) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$

b) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

4)Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=\dfrac{1}{(x-E(x))^2}$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $E(x)=x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

b) En déduire le domaine d'étude de g

c) Donner le Tableau de variation de g sur : $]-1;1[$

d)Tracer la représentation graphique de la fonction g sur : $[-3;3[$

Solution : $f(x)=(x-E(x))^2$

1) On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $E(x) \leq x \prec E(x)+1 \Leftrightarrow 0 \leq x-E(x) \prec 1 \Leftrightarrow 0^2 \leq (x-E(x))^2 \prec 1^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \prec 1$

Donc : f est bornée
2)a) - $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \in \mathbb{R}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

b) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :
$D_E=D_f \cap [0;1[=\mathbb{R} \cap [0;1[=[0;1[$

3) a) Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$:

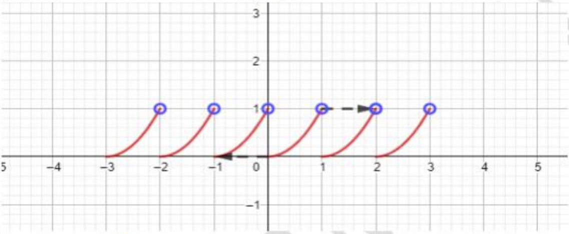
$x \in [0;1[\Leftrightarrow 0 \leq x \prec 1$

Donc : $f(x)=(x-E(x))^2=(x-0)^2=x^2$

b) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$

PROF: ATMANI NAJIB

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_1=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$



4) $g(x)=\dfrac{1}{(x-E(x))^2}$

4)a) $\Rightarrow$) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ E(x)=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$

Supposons que : $E(x)=x$ Montrons que : $x\in\mathbb{Z}$

On a : $E(x)$ est un entier relatif intérieur ou égale a x

Donc : $E(x)\in\mathbb{Z}$ et $E(x)=x$ par suite : $x\in\mathbb{Z}$

$\Leftarrow$) Montrons que : $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow E(x)=x$

On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

Donc : $E(x)\leq x\leq E(x)$

Donc : $E(x)=x$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$: $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

b) $D_g=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,E(x)\neq x\}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Car : $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

Puisque : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et $f\geq 0$ et croissante sur $I_1=[0;1[$

Alors : g et décroissante sur $I_1=[0;1[$ et g est aussi périodique de de période 1.

$D_E=D_g\cap[0;1[=]0;1[$

c) Le Tableau de variation de g sur : $]-1;1[$

x	-1	0	1
$g(x)$	↘	↘	

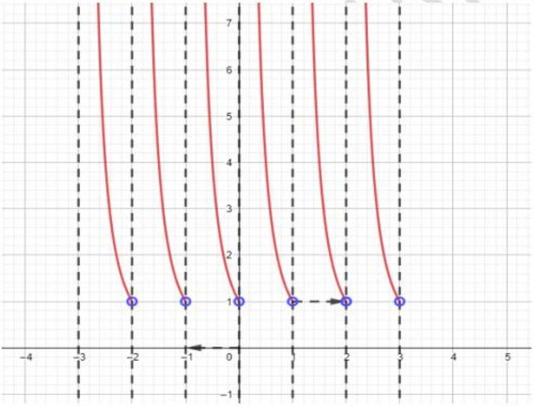
d)Traçage de la représentation graphique de la fonction g sur : $[-3;3[$

a) Une expression simple de $g(x)$ sur l'intervalle : $]0;1[$:

$x \in]0;1[\Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$

Donc : $g(x) = \dfrac{1}{(x-E(x))^2} = \dfrac{1}{(x-0)^2} = \dfrac{1}{x^2}$

b) Pour Tracer la représentation graphique de la fonction g sur $[-3;3[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $]0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$



Exercice 16: Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x \times \sqrt{\left(1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2 + 1}$

1) Déterminer : D_f

2) Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$: $\sqrt{1+x^2} \prec f(x) \leq \sqrt{1+2x+2x^2}$

3) Montrer que : $\forall x \in]-1;0[$: $-\sqrt{1+x^2} \prec f(x) \leq -\sqrt{1+2x+2x^2}$

4) Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[$: $f(x) = \sqrt{2}x$

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

2) Montrons que : $\forall x \in]0;+\infty[$: $\sqrt{1+x^2} \prec f(x) \leq \sqrt{1+2x+2x^2}$

Soit $x \in]0;+\infty[$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow \dfrac{1}{x}-1 \prec E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{x} \prec E\left(\dfrac{1}{x}\right)+1 \leq \dfrac{1}{x}+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2} \prec \left(1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2 \leq \left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}+1 \prec \left(1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2+1 \leq \left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2+1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \prec \sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1} \le \sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1} \Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \prec x\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1} \le x\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \prec f(x) \le x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}+1\right)+1} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \prec f(x) \le \sqrt{1+2x+2x^2}$$

3) Montrons que : $\forall x \in \left]-1;0\right[$: $-\sqrt{1+x^2} \prec f(x) \le -\sqrt{1+2x+2x^2}$

Soit $x \in \left]-1;0\right[$; donc : $-1 \prec x \prec 0$ et donc : $\frac{1}{x} \prec -1 \Rightarrow \frac{1}{x}+1 \prec 0$

On sait que : $x-1 \prec E(x) \le x$ donc: $\frac{1}{x}-1 \prec E\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} \prec E\left(\frac{1}{x}\right)+1 \le \frac{1}{x}+1 \prec 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)^2 \le \left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \prec \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1 \le \left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1 \le \frac{1}{x^2}+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1} \le \sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1} \le \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \prec x\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1} \le x\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \prec x\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1} \le -\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{1+x^2} \prec f(x) \le -x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}+1\right)+1} \Rightarrow -\sqrt{1+x^2} \prec f(x) \le -\sqrt{1+2x+2x^2}$$

4) Montrons que : $\forall x \in \left]1;+\infty\right[$: $f(x)=\sqrt{2}x$

Soit $x \succ 1 \Rightarrow 0 \prec \frac{1}{x} \prec 1 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow f(x)=x\times\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}=x\times\sqrt{1+1}=\sqrt{2}x$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2}x = +\infty$

Soit $x \prec -1 \Rightarrow -1 \prec \frac{1}{x} \prec 0 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=-1 \Rightarrow f(x)=x\times\sqrt{(1-1)^2+1}=x$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

Exercice 17 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)$

PROF: ATMANI NAJIB

2) Calculer : $S=\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)$

Solution : 1) Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $E(x)\le x\prec E(x)+1$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ 0\le x-E(x)\prec 1$

On pose : $x-E(x)=r$ donc : $0\le r\prec 1$

$x-E(x)=r\Leftrightarrow x=E(x)+r$

$$E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)\Leftrightarrow E\big(E(x)+r\big)+E\left(E(x)+r+\frac{1}{2}\right)=E\big(2\big(E(x)+r\big)\big)$$

$$\Leftrightarrow E(x)+E(r)+E(x)+E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E\big(2E(x)+2r\big)\Leftrightarrow 2E(x)+0+E\left(r+\frac{1}{2}\right)=2E(x)+E(2r)$$

Donc : $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)\Leftrightarrow E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Si je montre que : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$ Avec : $0\le r\prec 1$ alors c'est fini

Si : $0\le r\prec\frac{1}{2}$ alors : $0\le 2r\prec 1$ et $\frac{1}{2}\le r+\frac{1}{2}\prec 1$donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=0$ et $E(2r)=0$

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Si : $\frac{1}{2}\le r\prec 1$ alors : $1\le 2r\prec 2$ et $\frac{3}{2}\le r+\frac{1}{2}\prec 2$ donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=1$ et $E(2r)=1$

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Par suite : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$ Avec : $0\le r\prec 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)$

2) $S=\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{2^k}{2^{k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right)$

Or on a : $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)$ donc : $E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)-E(x)$

Donc : $S=\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(E\left(2\frac{x}{2^{k+1}}\right)-E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(E\left(\frac{x}{2^{k}}\right)-E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right)$

$S=E\left(\frac{x}{2^0}\right)-E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ (Somme télescopique)

$S=E(x)-E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB