http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°7 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}}$ 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{6|x+5|+2}$ 3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x-5}{x+2}}$

4) $f(x)=\dfrac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10|-|6+3x|}$ 5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$ 6) $f(x)=(x-2)\sqrt{x^4-7x^2+12}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{x^2}{4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}\neq 0\right\}$

$4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}=0$ Signifie que : $x^2+\dfrac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

Signifie que : $x^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$ c'est-à-dire : $x^2-\left(\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)x+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

C'est-à-dire : $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ par suite : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{6|x+5|+2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/6|x+5|+2\neq 0 \quad et\ x\geq 0\right\}$

On a : $|x+5|\geq 0$ donc : $6|x+5|\geq 0$ donc : $6|x+5|+2\geq 2>0$

Donc : $6|x+5|+2\neq 0$

Par suite : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\right\}$

Par suite : $D_f=\left[0,+\infty\right[$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x-5}{x+2}}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0 \quad et\ \dfrac{-x-5}{x+2}\geq 0\right\}$

$-x-5=0$ Équivaut à : $x=-5$ et $x+2=0$ qui signifie que : $x=-2$

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x-5}{x+2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f=[-5,-2[$

4) $f(x)=\dfrac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10|-|6+3x|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|7x-10|-|6+3x|\neq 0\ \ et\ \ x-1\geq 0\ \}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|7x-10|-|6+3x|\neq 0\ \ et\ \ x\geq 1\ \}$

$|7x-10|-|6+3x|=0$ Équivalent à : $|7x-10|=|6+3x|$

Équivalent à : $7x-10=6+3x$ ou $7x-10=-(6+3x)$

Équivalent à : $4x=16$ ou $10x=4$ équivalent à $x=4$ ou $x=2/5$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\dfrac{2}{5}\ \ et\ \ x\neq 4\ \ et\ x\geq 1\right\}$

Donc : $D_f=[1;4[\cup]4;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\ \ et\ \ 4-2x>0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\ \ et\ \ -2x>-4\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\ \ et\ \ x<2\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-1\leq x<2\}$

Donc $D_f=[-1,2[$

6) $f(x)=(x-2)\sqrt{x^4-7x^2+12}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^4-7x^2+12\geq 0\ \}$

a) D'abord on va résoudre l'équation $x^4-7x^2+12=0$

Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.
Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4-7x^2+12=0$ Équivaut à : $\left(x^2\right)^2-7x^2+12=0$

Je pose : $X=x^2$ l'équation devienne : $X^2-7X+12=0$

Le discriminant de : $X^2-7X+12=0$ est : $\Delta=(-7)^2-4\times 1\times 12=49-48=1>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{7-\sqrt{1}}{2\times 1}=\dfrac{6}{2}=3$ et $X_2=\dfrac{7+\sqrt{1}}{2\times 1}=\dfrac{8}{2}=4$

C'est-à-dire : $x^2=3$ ou $x^2=4$

C'est-à-dire : $x=\pm\sqrt{3}$ ou $x=\mp 2$

b) Résolution de l'inéquation : $x^4-7x^2+12\geq 0$

On a une factorisation de x^4-7x^2+12 en un produit de monômes du premier degré :

$x^4-7x^2+12=1(x+2)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x-2)$

PROF. ATMANI NAJIB

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^4-7x^2+12\geq 0$ Équivaut à : $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

Ainsi : $D_f=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

Exercice 2 : Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2x-5$

Et $g(x)=-x-3$

Étudier les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

Solution : Soit h(x) = f(x) – g(x)
Donc : h(x)= x² – 2x – 5 + x + 3 = x² – x – 2
h est une fonction du second degré.
Calculons son discriminant afin de déterminer son signe : a = 1, b = -1 et c = -2.
$\Delta = (-1)^2 - [4 \times 1 \times (-2)] = 9 = 3^2$
Δ étant strictement positif, le trinôme admet deux racines qui sont :
$x_1=\frac{1+3}{2\times 1}=2$ et $x_2=\frac{1-3}{2\times 1}=-1$
Le signe de la fonction est du signe de : a, c'est-à-dire positif de part et d'autre des racines mais du signe contraire (donc négatif) entre ces racines.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent (C_f) est confondue avec (C_g) pour : x = -1 et x = 2

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-1\infty;2\right[$

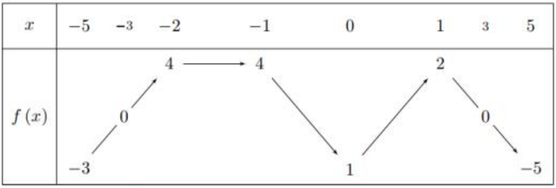
Exercice 3 : À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

1) a) $f(1,9).....f(3,8)$ b) $f(-4,2).....f(-2,7)$ c) $f(-1,8).....f(-1,4)$

2) Peut-on comparer l'image des nombres $-1,7$ *et* $1,5$? Justifier.

PROF ATMANI NAJIB

3) Peut-on comparer l'image des nombres $-0,6$ *et* $-4,8$? Justifier.



Solution :1) a) $f(1,9) > f(3,8)$) car 1,9 < 3,8 et f est décroissante sur [1 ; 5].

b) $f(-4,2) < f(-2,7)$ car -4,2< -2,7 et f est croissante sur [-5 ; -2].

c) $f(-1,8) = f(-1,4)$ car -1,8 < -1,4 et f est constante sur [-2 ; -1].

2) On ne peut pas comparer f (−1,7) et f (1,5) car la fonction f n'est pas monotone (elle change de sens de variation) sur [−1,7 ; 1,5].

3) $f(-0,6) > f(-4,8)$ car d'après le signe de la fonction $f(-0,6) > 0$ et $f(-4,8) < 0$ (par contre, on ne peut pas utiliser le sens de variation qui change sur l'intervalle [−4,8 ; −0,6]).

Exercice 4 : Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin x - 3$

Montrer que : g est Bornée.

Solution : On a $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Donc $-4-3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4-3$

Donc $-7 \leq g(x) \leq 1$

Donc : g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que 1 est le minimum absolu de f sur D_f

3) Montrer que $\dfrac{7}{3}$ est le maximum absolu de f sur D_f

4) Que peut-on déduire ?

Solution :1) $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2+3x+3 \neq 0 \right\}$

$\Delta = -3 \prec 0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{2x^2+7x+7-1\left(x^2+3x+3\right)}{x^2+3x+3} = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x) - 1 = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ Or $x^2+3x+3 \succ 0$ car $\Delta = -3 \prec 0$(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2 \geq 0$ donc $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 1$

PROF: ATMANI NAJIB

$$f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)-1=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Donc : $f(-2)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : 1 est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

3) Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}\leq 0$$

Par suite : f est majorée par $\frac{7}{3}$.

$$f(x)=\frac{7}{3} \Leftrightarrow f(x)-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

Conclusion : $f(x)\leq f(0)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $\frac{7}{3}$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

4)On a : $\forall x\in\mathbb{R}$: $1\leq f(x)\leq\frac{7}{3}$

Donc :f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

2) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $\quad f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2-4$

$f(x)=(x+\sqrt{x})^2-4$ Donc : $f(x)+4=(x+\sqrt{x})^2\geq 0$

Donc : $f(x)+4\geq 0$ par suite : $f(x)\geq -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

Donc : $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M\in\mathbb{R}: f(x)\leq M\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : (x+\sqrt{x})^2-4\leq M \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : (x+\sqrt{x})^2\leq M+4$$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : x+\sqrt{x}\leq\sqrt{M+4}$ (On peut toujours supposer $M\geq 0$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : (\sqrt{x})^2+2\times\frac{1}{2}\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : \sqrt{x}\leq\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

PROF ATMANI NAJIB

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x \le \left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2$ Absurde

Donc : f est non majorée

Exercice 7 : Vérifier que f est périodique et T est une période de f dans chacune des cas suivants et donner un domaine d'étude de f : D_E

1) $f(x) = 2\sin x - 5\cos 2x \quad : \; T = 2\pi$

2) $f(x) = \sin 2x - 7\cos 4x \quad : \; T = \pi$

3) $f(x) = 6\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \; : \; T = \pi$

4) $f(x) = 6\sin 6x - \frac{1}{3}\tan 3x \; : \; T = \frac{\pi}{3}$

Solution : 1) $f(x) = 2\sin x - 5\cos 2x \quad : \; T = 2\pi \; ; \; D_f = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) - 5\cos(2(x+2\pi)) = 2\sin x - 5\cos(2x+4\pi) = 2\sin x - 5\cos(2x) = f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et 2π est une période de f

Comme : f une fonction périodique et 2π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :

$D_E = [0, 2\pi] \cap \mathbb{R} = [0, 2\pi]$

2) $f(x) = \sin 2x - 7\cos 4x \quad : \; T = \pi \; ; \; D_f = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f(x+\pi) = \sin 2(x+\pi) - 7\cos(4(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) - 7\cos(4x+4\pi) = \sin 2x - 7\cos(4x) = f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et π est une période de f

Comme : f une fonction périodique et π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :

$D_E = [0, \pi] \cap \mathbb{R} = [0, \pi]$

3) $f(x) = 6\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \; : \; T = \pi \; ; \; D_f = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x+\pi) = 6\sin\left(2(x+\pi) - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 6\sin\left(2x + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 6\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = f(x)$

Car on sait que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et π est une période de f

Comme : f une fonction périodique et π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :

$D_E = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap \mathbb{R} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

4) $f(x) = 6\sin 6x - \frac{1}{3}\tan 3x \; : \; T = \frac{\pi}{3}$

PROF: ATMANI NAJIB

$x \in D_f \Leftrightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$f(x+\pi) = 6\sin(6(x+\pi)) - \frac{1}{3}\tan(3(x+\pi)) = 6\sin(6x+6\pi) - \frac{1}{3}\tan(3x+3\pi) = 6\sin 6x - \frac{1}{3}\tan 3x = f(x)$$

Car on sait que la fonction Sinus est périodique de période 2π et tan est périodique de période π

Donc : f est périodique et π est une période de f

Comme : f une fonction périodique et π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :

$D_E = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \cap D_f$

Exercice 8 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = 2$ et paire

Tel que : $f(x) = x \quad \forall x \in [0,1]$

1) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{7}{2}\right)$; $f(2027)$; $f\left(-\frac{2006}{3}\right)$

2)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $I = [-5;5]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) → on a : $\frac{1}{2} \in [0,1]$ donc : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\rightarrow f\left(-\frac{7}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2} - 4\right) = f\left(-2\times 2 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ car f est périodique de période $T = 2$

En effet : $f(k \times T + x) = f(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow f(2027) = f(1+2026) = f(2\times 1013 + 1) = f(1) = 1$ car f est périodique de période $T = 2$ et $1 \in [0,1]$

En effet : $f(k \times T + x) = f(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow f\left(-\frac{2006}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3} - 668\right) = f\left(-\frac{2}{3} - 2\times 334\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ car f est périodique de période $T = 2$

et $\frac{2}{3} \in [0,1]$: En effet : $f(k \times T + x) = f(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) f une fonction paire donc l'axe des ordonnées c'est un axe de symétrie de (C_f)

Dans l'intervalle $I_0' = [0,1]$: On a : f est une fonction linéaire

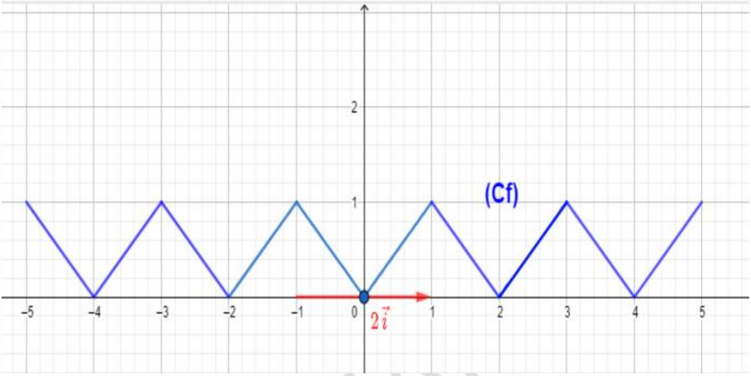
Donc la courbe de f (C_f) c'est un segment.

Soit (C_0) la courbe de f dans l'intervalle $I_0 = [-1,1]$ et (C_k) la courbe de f dans l'intervalle $I_k = [-1+2k, 1+2k]$

PROF: ATMANI NAJIB

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I=[-5;5]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $I_0=[-1,1]$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Pour tracer (C_k)



Exercice 9 : Etudier les variations des fonctions définies par : 1) $f(x)=-2x-100$ 2) $g(x)=\dfrac{-4}{x}$

3) $h(x)=-2x^3+2027$ 4) $k(x)=2001\sqrt{x-2}+2024$

Solution : 1) $f(x)=-2x-100$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $v:x\rightarrow x$

On sait que la fonction $v:x\rightarrow x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $-2<0$ donc la fonction $-2v$ est aussi décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f=-2v+(-100)$ aussi décroissante sur $\mathbb{R}$

2) $g(x)=\dfrac{-4}{x}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\rightarrow\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $g=-4v$

Alors : g est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-4<0$

3) $h(x)=-2x^3+2027$ et $D_f=\mathbb{R}$: On sait que : $v:x\rightarrow x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

On a : $h=-2v+2027$

Puisque la fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $-2v$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $h=-2v+2027$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-2<0$

4) $k(x)=2001\sqrt{x-2}+2024$: $D_k=[2;+\infty[$

Puisque la fonction $v:x\rightarrow\sqrt{x-2}$ est croissante sur $[2;+\infty[$

PROF: ATMANI

Donc : $k = 2001v + 2024$ est croissante sur $[2;+\infty[$ car $2001 > 0$

Exercice 10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

1)Déterminer D_f

2) a) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2) + 1$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$

c) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$

3)a) Déterminer α et β tel que : $f(x) = \frac{1}{4}(x+\alpha)^2 + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

c) Dresser le Tableau de variations de f

4) a) En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ On a : $f(x) \geq -1$

b) En déduire que : pour tout $x \in \left[-2;\frac{1}{2}\right]$ On a : $5 \leq f(x) \leq \frac{9}{16}$

c) En déduire que : pour tout $x \in [-5;-2]$ On a : $-1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$

5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = 2x$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x) < f(x)$

9)Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2 + 4x = 4m$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2)Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{1}{4}x_2^2 + x_2\right) - \left(\frac{1}{4}x_1^2 + x_1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{4}x_2^2 + x_2 - \frac{1}{4}x_1^2 - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{\frac{1}{4}\left(x_2^2 - x_1^2\right) + (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

PROF: ATMANI NAJIB

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)\left(\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1\right)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-2;+\infty[$ et $x_2\in[-2;+\infty[$ alors : $x_1\geq-2$ et $x_2\geq-2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)>-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1>0$.

Donc : $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-2]$ et $x_2\in]-\infty;-2]$ alors : $x_1\leq-2$ et $x_2\leq-2$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique : $x_1+x_2<-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)<-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-2]$

3)a) Déterminons : α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x=\frac{1}{4}(x^2+4x)=\frac{1}{4}(x^2+2\times2x+2^2-4)=\frac{1}{4}\left((x+2)^2-4\right)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$$

b) On a : $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$ donc : $\alpha=2$ et $\beta=-1$ car : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet : $W(-\alpha;\beta)$

C'est-à-dire : $W(-2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-2$

c) Tableau de variation : On a : $a=\frac{1}{4}>0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

4) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-2)=-1$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(-2) \leq f(x)$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq f(x)$

b) Soit : $x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$ alors : $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I = [-2; +\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme : $f(-2) = -1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

Par suite : $5 \leq f(x) \leq \frac{9}{16}$ si $x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$

b) Soit : $x \in [-5; -2]$ On a alors : $-5 \leq x \leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty; -2]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5; -2]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f(-5)$ et comme :

$f(-2) = -1$ Et $f(-5) = \frac{1}{4} \times (-5)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$ Par suite : $-1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$

Signifie $x\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 0$ Signifie $x = 0$ ou $\frac{1}{4}x + 1 = 0$

Signifie $x = 0$ ou $x = -4$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$O(0;0)$ et $A(-4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

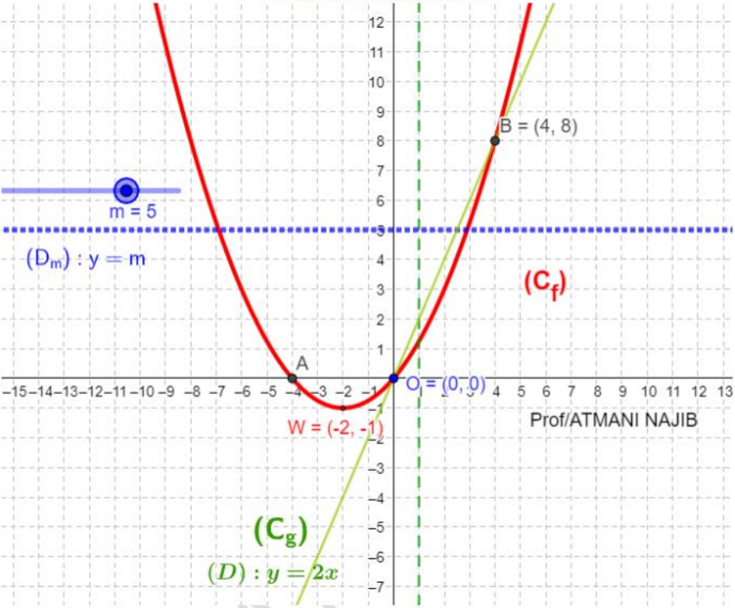
Et on a $f(0) = \frac{1}{4}(0)^2 + 0 = 0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = 2x$

Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

PROF: ATMANI NAJIB



7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = 0$ et $x = 4$ donc $S = \{0;4\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $\frac{1}{4}x^2 + x = 2x$ c'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2 - x = 0$ Signifie $x\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$

Signifie $x = 0$ ou $\frac{1}{4}x - 1 = 0$

Signifie $x = 0$ ou $x = 4$

Donc : $S = \{0;4\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) \geq f(x)$:

PROF. A

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in [0;4]$

Donc $S = [0;4]$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) \geq f(x)$:

$g(x) \geq f(x)$ Signifie $\frac{1}{4}x^2 + x \leq 2x$

C'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2 - x \leq 0$

C'est-à-dire : $x^2 - 4x \leq 0$

Les racines sont : $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = [0;4]$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2 + 4x = 4m$ avec : $m \in \mathbb{R}$

$x^2 + 4x = 4m \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 4x}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}x^2 + x \Leftrightarrow m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m > -1$ il y'a deux solutions
Si : $m = -1$ il y'a une solution c'est : x = -1
Si : $m < -1$ l'équation n'admet pas de solution

Exercice 11 : Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les nombres réels : a et b tel que : $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$; $\forall x \in D_f$

3) En déduire que f est minorée par 1
4) Soit : $m \in \mathbb{R}$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = m$ d'inconnue x et m paramètre réel

b) En déduire : $f(\mathbb{R} - \{-1\})$

5) a) Soient : $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2) = \frac{x_1 + x_2 + 2}{(x_1+1)^2 \times (x_2+1)^2}$

b) En déduire les variations de f sur D_f

6) Soit g une fonction définie par : $g(x) = f(|x|)$

a) Etudier la parité de g

PROF: ATMANI NAJIB

b) Dresser le tableau de variations de g

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

---

2) Déterminons les nombres réels : a et b tel que : $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Soit : $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2} \Leftrightarrow x^2+2x = a(x+1)^2+b \Leftrightarrow x^2+2x = ax^2+2ax+a+b$$

$\begin{cases} a=1 \\ 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ d'où : ; $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}}$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

3) En déduisons que f est minorée par 1

On a : $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Donc : $f(x) - 1 = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Donc : $f(x) < 1$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Donc : f est minorée par 1

4) Soit : $m \in \mathbb{R}$

a) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) $f(x) = m$ d'inconnue x et m paramètre réel

$$f(x) = m \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = m \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - m$$

→L'équation : (E) admet une solution si $1 - m > 0$ c'est-à-dire : $m < 1$

$$f(x) = m \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{1-m} \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{\frac{1}{1-m}} \ ou \ x+1 = -\sqrt{\frac{1}{1-m}}$$

$$f(x) = m \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{1-m}} - 1 ou \ x = -\sqrt{\frac{1}{1-m}} - 1$$

Donc : $S = \left\{ -\sqrt{\frac{1}{1-m}} - 1 ; \sqrt{\frac{1}{1-m}} - 1 \right\}$

→L'équation : (E) n'admet pas de solution si $m \geq 1$

Donc : $S = \varnothing$

1) On a : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) < 1$ donc : $f(\mathbb{R} - \{-1\}) \subset]-\infty ; 1[$ (1)

Et d'après la question :4)a) : $\forall m \in]-\infty ; 1[$ $\exists x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ tel que : $f(x) = m$ (2)

PROF: ATMANI NAJIB

De : (1) et (2) on obtient : $\boxed{f\left(\mathbb{R}-\{-1\}\right)=\left]-\infty;1\right[}$

5) a) Soient : $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)^2\times(x_2+1)^2}$

$$f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{1}{(x_1+1)^2}-1+\frac{1}{(x_2+1)^2}=\frac{1}{(x_2+1)^2}-\frac{1}{(x_1+1)^2}=\frac{(x_1+1)^2-(x_2+1)^2}{(x_1+1)^2(x_2+1)^2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)}{(x_1+1)^2(x_2+1)^2}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)^2\times(x_2+1)^2}$

b) Déduction des variations de f sur $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$

→Les variations de f sur $\left]-\infty;-1\right[$

Soient : $x_1 \in \left]-\infty;-1\right[$ et $x_2 \in \left]-\infty;-1\right[$ tel que : $x_1 \neq x_2$

On a : $x_1<-1$ et $x_2<-1$ donc : $x_1+x_2<-2$ donc : $x_1+x_2+2<0$

Et Comme : $(x_1+1)^2\times(x_2+1)^2>0$

Alors : $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-1\right[$

→Les variations de f sur $\left]-1;+\infty\right[$

Soient : $x_1 \in \left]-1;+\infty\right[$ et $x_2 \in \left]-1;+\infty\right[$ tel que : $x_1 \neq x_2$

On a : $x_1>-1$ et $x_2>-1$ donc : $x_1+x_2>-2$ donc : $x_1+x_2+2>0$

Et Comme : $(x_1+1)^2\times(x_2+1)^2>0$

Alors : $T(x_1;x_2)>0$

D'où : f est strictement croissante sur $\left]-1;+\infty\right[$

6) Soit g une fonction définie par : $g(x)=f(|x|)$

a) Etudions la parité de g

On a : $g(x)=f(|x|)$

$D_g=\{x\in\mathbb{R} / |x|\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq-1\}$

Donc : $D_g=\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R}$; $|x|\neq-1$

- Pour tout réel x : si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$

Donc g est une fonction paire,

b) Dressons le tableau de variations de g

On a : $g(x)=f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et comme g est une fonction paire,

Alors : g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

Par suite le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g(x)$	↘ 0 ↗

Exercice 12 : Soit les fonctions f et g définies par : $g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ et $f(x)=\frac{1}{x}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h

2) Déterminer : $h(x)$ si $x\in D_h$

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$ et $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\}$

$x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g$

$x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\neq 0\ et\ \ f(x)\neq 2$

$f(x)=2\Leftrightarrow \frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\neq 0\ et\ x\neq\frac{1}{2}$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

2)Soit : $x\in\mathbb{R}-\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{x+2}{1-2x}$$

Donc : $h(x)=\frac{x+2}{1-2x}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 13 : Soit les fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1$ et $h(x)=2x^2+3x-1$

Déterminer la fonction g telle que : $h=g\circ f$

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$: on pose : $f(x)=y$

$f(x)=y\Leftrightarrow x-1=y\Leftrightarrow x=y+1$

$g(y)=h(x)=2x^2+3x-1=2(y+1)^2+3(y+1)-1=2y^2+4y+2+3y+3-1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $g(y)=2y^2+7y+4$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ g(x)=2x^2+7x+4$

Exercice 14 : Soient U et V deux fonctions définies par :

$U(x)=x^2+2x+3$ et $V(x)=x^2-4x+2$

1) Donner le tableau de variation de U et V

2) Soit f la fonction numérique tel que : $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+11$

a) Vérifier que : $f(x)=(U\circ V)(x)\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

b) Étudier la monotonie de f dans les intervalles suivants : $]-\infty;1]$; $[1;2]$; $[2;3]$ et $[3;+\infty[$

c) Déterminer les extrémums de la fonction f

Solution :1) a) $D_U=\mathbb{R}$: $U(x)=x^2+2x+3$

Le tableau de variation de U : On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=3$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times1}=-1$ Et $\beta=U(\alpha)=U(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+3=2$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_U) c'est une parabole de sommet $W(-1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$U(x)$	↘	2	↗

a) $V(x)=x^2-4x+2$: $D_V=\mathbb{R}$

Le tableau de variation de V : On a : $a=1$ et $b=-4$ et $c=2$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times1}=2$ Et $\beta=V(\alpha)=V(2)=(2)^2-4\times2+2=-2$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_V) c'est une parabole de sommet $W'(2;-2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$V(x)$	↘	-2	↗

2) Soit f la fonction numérique tel que : $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+11$

a) Vérifions que : $f(x)=(U\circ V)(x)\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

$(U\circ V)(x)=U(V(x))=(V(x))^2+2V(x)+3=(x^2-4x+2)^2+2(x^2-4x+2)+3$

$(U\circ V)(x)=x^4-8x^3+22x^2+20x-16x+4+2x^2-8x+4+3=x^4-8x^3+22x^2-24x+11$

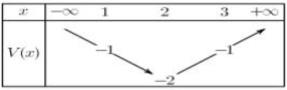
Donc : $f(x)=(U\circ V)(x)\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

b)→ Étudier la monotonie de f dans l'intervalle : $]-\infty;1]$

On a : $f(x)=(U\circ V)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Puisque V est décroissante sur $]-\infty;1]$ et $V(]-\infty;1])\subset[-1;+\infty[$ et U est croissante sur $[-1;+\infty[$ alors $U\circ V$ est décroissante sur $]-\infty;1]$



→ Étudier la monotonie de f dans l'intervalle : $[1;2]$

On a : $f(x)=(U\circ V)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Puisque V est décroissante sur $[1;2]$ et $V([1;2])=[-2;-1]$ et U est décroissante sur $[-2;-1]$ alors $U\circ V$ est croissante sur $[1;2]$

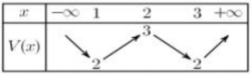
→ Étudier la monotonie de f dans l'intervalle : $[2;3]$

Puisque V est croissante sur $[2;3]$ et $V([2;3])=[-2;-1]$ et U est décroissante sur $[-2;-1]$ alors $U\circ V$ est décroissante sur $[2;3]$

→ Étudier la monotonie de f dans l'intervalle : $[3;+\infty[$

Puisque V est croissante sur $[3;+\infty[$ et $V([3;+\infty[)\subset[-1;+\infty[$ et U est croissante sur $[-1;+\infty[$ alors $U\circ V$ est croissante sur $[3;+\infty[$

c) Déterminons les extrémums de la fonction f



Le nombre 2 est le minimum absolu de f en 1 et 3
Le nombre 3 est u maximum relatif de f en 2

Exercice 15 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+2}$ et $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

A) 1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : $A(-1;1)$ et $B(2;2)$ sont des points d'intersections de (C_f) et (C_g)

3) Déterminer les tableaux de variations de f et g

4) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations : $\sqrt{x+2}-\dfrac{3x}{2x-1}\prec 0$ et $\dfrac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$

PROF: ATMANI NAJIB

B)1) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$

a) Déterminer D_h b) Montrer que : $h=f\circ g$

2) a) Déterminer graphiquement : $g\left(\left[-2;-\dfrac{7}{4}\right[\right)$ et $g\left(\left]-\dfrac{7}{4};+\infty\right[\right)$

b) Étudier les variations de h et donner son tableau de variation.

c) Déterminer la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\dfrac{7}{4}\right[$

3) Montrer que : $h(x)\succ\dfrac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\dfrac{7}{4};+\infty\right]$

Solution : A) 1) $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\dfrac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

2) $A(-1;1)$ et $B(2;2)$:

$f(-1)=g(-1)=1\Rightarrow A(-1;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=g(2)=2\Rightarrow B(2;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

3)Détermination des tableaux de variations de f et g :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

x	-2	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	$+\infty$

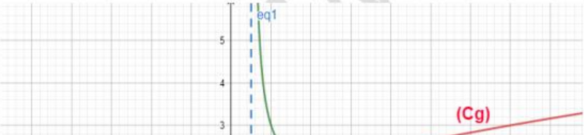
3) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) $g(x)=\sqrt{x+2}$:

b) (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives

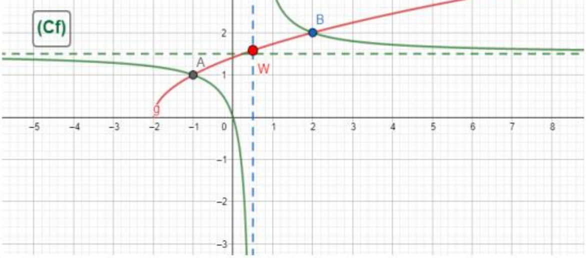
$x=\dfrac{1}{2}$ et $y=\dfrac{3}{2}$

x	-2	-1	2	7
$g(x)$	0	1	2	3



4) Résolution graphique sur $\mathbb{R}$ des inéquations :

PROF ATMANI NAJIB



$\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}\prec 0$ et

$\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\le 0$:

a) $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}\prec 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}\prec\frac{3x}{2x-1}\Leftrightarrow g(x)\prec f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left[-2;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[$

Donc : $S=\left[-2;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[$

b) $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\le 0\Leftrightarrow\frac{3x}{2x-1}\le 0\Leftrightarrow f(x)\le 0$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses si $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$

Donc : $S=\left[0;\frac{1}{2}\right[$

B) 1) On pose : $h(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$ $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\ge 0\ \ et\ \ 2\sqrt{x+2}-1\ne 0\right\}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x\ge -2\ \ et\ \ \sqrt{x+2}\ne 1/2\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\ge -2\ \ et\ \ x+2\ne 1/4\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\ge -2\ \ et\ \ x\ne -7/4\right\}$

$D_h=\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\cup\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

b) Montrons que : $h=f\circ g$:

$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{3g(x)}{2g(x)-1}=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}=h(x)$

2) a) graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ $\left(g\left(\frac{-7}{4}\right)=\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Étude des variations de h et détermination de son tableau de variation :

- Puisque g est croissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$ et $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et f est décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$

ATMANI NAJIB

alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

• Puisque g est croissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

x	$-2\ \ -7/2+\infty$	
$f(x)$	↘	↘

c) Détermination de la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

On a : h est décroissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

Alors : $x\in\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\Rightarrow -2\le x\prec-\frac{7}{4}\Rightarrow h(x)\le h(-2)$ et $h(-2)=0$

Donc :0 est la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

3) Montrons que : $h(x)\succ\frac{3}{2}\ ;\ \forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

$h(x)\succ\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}\succ\frac{3}{2}$ et puisque : $x\succ-\frac{7}{4}$ alors : $2\sqrt{x+2}-1\succ 0$

Donc : $\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}\succ\frac{3}{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{x+2}\succ 6\sqrt{x+2}-3\Leftrightarrow 0\succ-3$ (vraie)

Donc : $h(x)\succ\frac{3}{2}\ ;\ \forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

Exercice 16 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x-4E\left(\frac{x}{4}\right)}$

1) Calculer : $f(1)\ ;\ f(4)\ :\ f(-5)$

2) Déterminer D_f

3) Montrer que : 4 est une période pour la fonction f
4) Montrer que f est bornée

5) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I=[0;4[$

6) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;8]\cap D_f=[-4;8]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) Calculons : $f(1)\ ;\ f(4)\ :\ f(-5)$

$\rightarrow f(1)=\sqrt{1-4E\left(\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{1-4\times 0}=\sqrt{1}=0$ car $0\le\frac{1}{4}<0+1$ c'est-à-dire : $E\left(\frac{1}{4}\right)=0$

$\rightarrow f(4)=\sqrt{4-4E\left(\frac{4}{4}\right)}=\sqrt{4-4E(1)}=\sqrt{4-4\times 1}=\sqrt{0}=0$ car: $E(1)=1$

$\rightarrow f(-5)=\sqrt{-5-4E\left(\frac{-5}{4}\right)}=\sqrt{-5-4E(-1{,}25)}=\sqrt{-5-4\times(-2)}=\sqrt{-5+8}=\sqrt{3}$ car

$-2\leq -1{,}25<-2+1$ c'est-à-dire : $E(-1{,}25)=-2$

2) $D_f=?$

$\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E\left(\frac{x}{4}\right)\leq\frac{x}{4}\prec E\left(\frac{x}{4}\right)+1$ et par suite : $4E\left(\frac{x}{4}\right)\leq x\prec 4E\left(\frac{x}{4}\right)+4$

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $4E\left(\frac{x}{4}\right)\leq x$ c'est-à-dire : $x-4E\left(\frac{x}{4}\right)\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

3) - $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+4\in\mathbb{R}$

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+4)=\sqrt{x+4-4E\left(\frac{x+4}{4}\right)}=\sqrt{x+4-4E\left(\frac{x}{4}+1\right)}=\sqrt{x+4-4E\left(\left(\frac{x}{4}\right)+1\right)}$

$=\sqrt{x+4-4E\left(\frac{x}{4}\right)-4}=\sqrt{x-4E\left(\frac{x}{4}\right)}=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 4.

4) Montrons que f est bornée

$\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E\left(\frac{x}{4}\right)\leq\frac{x}{4}\prec E\left(\frac{x}{4}\right)+1$ et par suite : $4E\left(\frac{x}{4}\right)\leq x\prec 4E\left(\frac{x}{4}\right)+4$

Donc : $4E\left(\frac{x}{4}\right)-4E\left(\frac{x}{4}\right)\leq x-4E\left(\frac{x}{4}\right)\prec 4E\left(\frac{x}{4}\right)+4-4E\left(\frac{x}{4}\right)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $0\leq x-4E\left(\frac{x}{4}\right)\prec 4$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\sqrt{0}\leq\sqrt{x-4E\left(\frac{x}{4}\right)}\prec\sqrt{4}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $0\leq f(x)\prec 2$

Donc : f est bornée

5) Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I=[0;4[$:

$x\in[0;4[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 4\Leftrightarrow 0\leq\frac{x}{4}\prec 1$ Donc : $E\left(\frac{x}{4}\right)=0$

Donc : $f(x)=\sqrt{x-4\times 0}=\sqrt{x}$

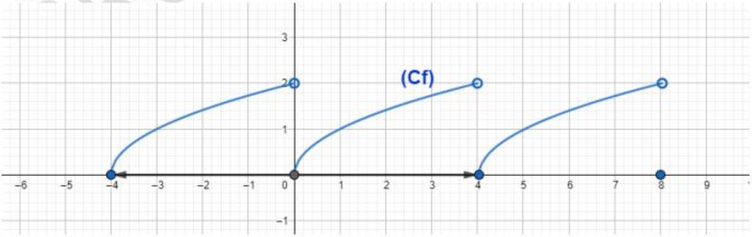
PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $f(x)=\sqrt{x}$ si $x\in[0;4[$

6) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-4;8]\cap D_f=[-4;8]$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[0;4[$ et utiliser les translation $4k\vec{i}$

$f(x)=\sqrt{x}$ si $x\in[0;4[$



Exercice 17 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $E(x)=-1$ 2) $E(2x-1)=3$ 3) $E(3x-5)=-1,5$ 4) $3E\left(\frac{x}{2}\right)+6=0$

5) $2E(x)-5=0$ 6) $E\left(\frac{2x-3}{3}\right)=\frac{x-1}{3}$ 7) $E\left(\frac{x^2-3x+1}{3}\right)=\frac{x-1}{3}$ 8) $E\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=2$

9) $E(2x-1)=E(x-4)$ 10) $E(3x)+2E(x)=15$

Solution : Remarque : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall p\in\mathbb{Z}$: $E(x)=p\Leftrightarrow p\le x\prec p+1$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation

1) $x\in S\Leftrightarrow E(x)=-1\Leftrightarrow -1\le x\prec -1+1\Leftrightarrow -1\le x\prec 0\Leftrightarrow x\in[-1;0[$

D'où : $S=[-1;0[$

2) $E(2x-1)=3\Leftrightarrow 3\le 2x-1\prec 3+1\Leftrightarrow 4\le 2x\prec 5\Leftrightarrow 2\le x\prec\frac{5}{2}\Leftrightarrow x\in\left[2;\frac{5}{2}\right[$

D'où : $S=\left[2;\frac{5}{2}\right[$

3) $E(3x-5)=-1,5$ $S=\varnothing$ car $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\in\mathbb{Z}$

4) (E) : $3E\left(\frac{x}{2}\right)+6=0$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$$x\in S\Leftrightarrow 3E\left(\frac{x}{2}\right)+6=0\Leftrightarrow 3E\left(\frac{x}{2}\right)=-6\Leftrightarrow E\left(\frac{x}{2}\right)=-2\Leftrightarrow -2\le\frac{x}{2}\prec -2+1\Leftrightarrow -2\le\frac{x}{2}\prec -1$$

$$\Leftrightarrow -4\le x\prec -2\Leftrightarrow x\in[-4;-2[$$

PROF: ATMANI NAJIB

D'où : $S=[-4;-2[$

5) $2E(x)-5=0 \Leftrightarrow E(x)=\frac{5}{2}\notin\mathbb{Z}$

$S=\varnothing$ car $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\in\mathbb{Z}$

6) (E) : $E\left(\frac{2x-3}{3}\right)=\frac{x-1}{3}$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$x\in S \Leftrightarrow E\left(\frac{2x-3}{3}\right)=\frac{x-1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}\in\mathbb{Z}$ et $\frac{x-1}{3}\leq\frac{2x-3}{3}\prec\frac{x-1}{3}+1$

On pose : $\frac{x-1}{3}=k\in\mathbb{Z}$ et donc : $x=3k+1$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\frac{x-1}{3}\leq\frac{2x-3}{3}\prec\frac{x-1}{3}+1 \Leftrightarrow k\leq\frac{2(3k+1)-3}{3}\prec k+1 \Leftrightarrow k\leq\frac{6k-1}{3}\prec k+1 \Leftrightarrow 3k\leq 6k-1\prec 3k+3$

$\Leftrightarrow 3k-3k\leq 6k-3k-1\prec 3k+3-3k \Leftrightarrow 0\leq 3k-1\prec 3 \Leftrightarrow 1\leq 3k\prec 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\prec k\leq\frac{4}{3}$ et $k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow k\in\{1\}$

Et puisque : $x=3k+1$ Donc : $x\in\{4\}$

C'est-à-dire : $S\subset\{4\}$

Inversement : on peut vérifier que : $\{4\}\subset S$ car : $E\left(\frac{2\times4-3}{3}\right)=E\left(\frac{5}{3}\right)=1$ et $\frac{4-1}{3}=1$

Finalement : $S=\{4\}$

7) (E) : $E\left(\frac{x^2-3x+1}{3}\right)=\frac{x-1}{3}$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$x\in S \Leftrightarrow E\left(\frac{x^2-3x+1}{3}\right)=\frac{x-1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}\in\mathbb{Z}$ et $\frac{x-1}{3}\leq\frac{x^2-3x+1}{3}\prec\frac{x-1}{3}+1$

On pose : $\frac{x-1}{3}=k\in\mathbb{Z}$ et donc : $x=3k+1$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\frac{x-1}{3}\leq\frac{x^2-3x+1}{3}\prec\frac{x-1}{3}+1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}\leq\frac{x^2-3x+1}{3}\prec\frac{x+2}{3} \Leftrightarrow x-1\leq x^2-3x+1\prec x+2 \Leftrightarrow 3k\leq(3k+1)^2-3(3k+1)+1\prec$

$\Leftrightarrow 3k\leq 9k^2+6k+1-9k-3+1\prec 3k+3 \Leftrightarrow 3k\leq 9k^2-3k-1\prec 3k+3 \Leftrightarrow 0\leq 9k^2-6k-1$ *et* $9k^2-6k-4\prec 0$

Pour : $9k^2-6k-4\prec 0$ $\Delta=108$ donc : $k'=\frac{6-\sqrt{108}}{18}\simeq-0,2$ et $k'=\frac{6+\sqrt{108}}{18}\simeq 0,9$

Donc :

x	$-\infty$		k'		$k"$		$+\infty$
$9k^2-6k-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $k=0$ or $x=3k+1$ c'est-à-dire : $x=1$

PROF. ATMANI NAJIB

Pour : $0 \leq 9k^2-6k-1$

$k=0$ Vérifie $9k^2-6k-4 \prec 0$ et pas $0 \leq 9k^2-6k-1$

Donc : $S=\varnothing$

8) $E\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=2 \Leftrightarrow x+3 \neq 0$ et $2 \leq \frac{x-1}{x+3} \prec 2+1$

$2 \leq \frac{x-1}{x+3} \prec 2+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-1}{x+3}-2$ et $\frac{x-1}{x+3}-3 \prec 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-1-2x-6}{x+3}$ et $\frac{x-1-3x-9}{x+3} \prec 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{-x-7}{x+3}$ et $\frac{-2x-10}{x+3} \prec 0$

Pour : $0 \leq \frac{-x-7}{x+3}$

x	$-\infty$		-7		-3		$+\infty$
$-x-7$		$-$	0	$-$		$-$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x-7}{x+3}$		$+$		$-$	‖	$+$	

$S_1=]-\infty;-7] \cup]-3;+\infty[$

Pour : $\frac{-2x-10}{x+3} \prec 0$

x	$-\infty$		-5		-3		$+\infty$
$-2x-10$		$-$	0	$-$		$-$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x-10}{x+3}$		$+$		$-$	‖	$+$	

$S_2=]-5;-3[$ D'où : $S=S_1 \cap S_2=\left(]-\infty;-7] \cup]-3;+\infty[\right) \cap]-5;-3[=\varnothing$

9) $E(2x-1)=E(x-4) \Leftrightarrow E(2x)-1=E(x)-4 \Leftrightarrow E(2x)=E(x)-3$: (E)

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Soit : $x \in S$

On pose : $E(x)=k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \leq x \prec k+1$

1ér cas : $k \leq x \prec k+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2k \leq 2x \prec 2k+1 \Leftrightarrow E(2x)=2k$

$x \in S \Leftrightarrow E(2x)=E(x)-3 \Leftrightarrow 2k=k-3 \Leftrightarrow \boxed{k=-3}$

$E(x)=-3 \Leftrightarrow -3 \leq x \prec -3+1 \Leftrightarrow -3 \leq x \prec -2 \Leftrightarrow x \in [-3;-2[$

D'où : $S_1=[-3;-2[\cap \left[-3;-3+\frac{1}{2}\right[=[-3;-2[\cap \left[-3;-\frac{5}{2}\right[=\left[-3;-\frac{5}{2}\right[$

PROF. ATMANI NAJIB

2^{ér}cas : $k+\frac{1}{2} \leq x \prec k+1 \Leftrightarrow 2k+1 \leq 2x \prec 2k+2 \Leftrightarrow E(2x)=2k+1$

$x \in S \Leftrightarrow E(2x)=E(x)-3 \Leftrightarrow 2k+1=k-3 \Leftrightarrow \boxed{k=-4}$

$E(x)=-4 \Leftrightarrow -4 \leq x \prec -4+1 \Leftrightarrow -4 \leq x \prec -3 \Leftrightarrow x \in [-4;-3[$

D'où : $S_2=[-4;-3[\cap\left[-4+\frac{1}{2};-4+1\right[=[-4;-3[\cap\left[-\frac{7}{2};-3\right[=\left[-\frac{7}{2};-3\right[$

Finalement : $S=S_1 \cup S_2=\left[-3;-\frac{5}{2}\right[\cup\left[-\frac{7}{2};-3\right[=\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right[$

10) (E): $E(3x)+2E(x)=15$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Soit : $x \in S$

On pose : $E(x)=k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \leq x \prec k+1$

1^{ér}cas : $k \leq x \prec k+\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3k \leq 3x \prec 3k+1 \Leftrightarrow E(3x)=3k$

$x \in S \Leftrightarrow E(3x)+2E(x)=15 \Leftrightarrow 3k+2k=15 \Leftrightarrow 5k=15 \Leftrightarrow \boxed{k=3}$

$E(x)=3 \Leftrightarrow 3 \leq x \prec 3+1 \Leftrightarrow 3 \leq x \prec 4 \Leftrightarrow x \in [3;4[$

D'où : $S_1=[3;4[\cap\left[3;3+\frac{1}{3}\right[=[3;4[\cap\left[3;\frac{10}{3}\right[=\left[3;\frac{10}{3}\right[$

2^{ér}cas : $k+\frac{1}{3} \leq x \prec k+\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3k+1 \leq 3x \prec 3k+2 \Leftrightarrow E(3x)=3k+1$

$x \in S \Leftrightarrow E(3x)+2E(x)=15 \Leftrightarrow 3k+1+2k=15 \Leftrightarrow 5k=14 \Leftrightarrow k=\frac{14}{5} \notin \mathbb{Z}$

D'où : $S_2=\varnothing$

2^{ér}cas : $k+\frac{2}{3} \leq x \prec k+1 \Leftrightarrow 3k+2 \leq 3x \prec 3k+3 \Leftrightarrow E(3x)=3k+2$

$x \in S \Leftrightarrow E(3x)+2E(x)=15 \Leftrightarrow 3k+2+2k=15 \Leftrightarrow 5k=13 \Leftrightarrow k=\frac{13}{5} \notin \mathbb{Z}$

D'où : $S_3=\varnothing$

Finalement : $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3=\left[3;\frac{10}{3}\right[\cup\varnothing\cup\varnothing=\left[3;\frac{10}{3}\right[$

Exercice 18 : 1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}$: $E(x) \leq n \Leftrightarrow x \in]-\infty;n+1[$

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}$: $E(x) \prec n \Leftrightarrow x \in]-\infty;n[$

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}$: $E(x) \geq n \Leftrightarrow x \in [n;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\succ n \Leftrightarrow x\in[n+1;+\infty[$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $E(x)\le 0$ b) $E(x)\prec 0$ c) $2E(x)-5\le 0$ d) $E(x)\ge 7$ e) $E(x)\succ 3$ f) $2E(x)-9\succ 0$

g) $-1\le E(3x)\le 1$

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\le n \Leftrightarrow x\in]-\infty;n+1[$

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow)$ Montrons que : $E(x)\le n\ \Rightarrow x\in]-\infty;n+1[$

Supposons que : $E(x)\le n$ et comme : $x-1\prec E(x)\le x$

Alors : $x-1\prec E(x)\le n$ c'est-à-dire : $x-1\prec n$ et par suite : $x\prec n+1$

Donc : $x\in]-\infty;n+1[$

$\Leftarrow)$ Montrons que : $x\in]-\infty;n+1[\ \Rightarrow E(x)\le n$

Supposons que : $x\in]-\infty;n+1[$ et montrons que : $E(x)\le n$

On a : $x\in]-\infty;n+1[$ c'est-à-dire : $x\prec n+1$

On a : aussi : $E(x)\le x$ donc : $E(x)\le x\prec n+1$

Alors : $E(x)\prec n+1$ c'est-à-dire : $E(x)\le n$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\le n \Leftrightarrow x\in]-\infty;n+1[$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\prec n \Leftrightarrow x\in]-\infty;n[$

PROF: ATMANI NAJIB

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$

$E(x)\prec n \Leftrightarrow E(x)\le n-1 \Leftrightarrow x\in]-\infty;n-1+1[\ \Leftrightarrow x\in]-\infty;n[$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\ge n \Leftrightarrow x\in[n;+\infty[$

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow)$ Montrons que : $E(x)\ge n\ \Rightarrow\ x\in[n;+\infty[$

Supposons que : $E(x)\ge n$ et comme : $E(x)\le x$

Alors : $n\le x$ c'est-à-dire : $x\in[n;+\infty[$

Donc : $E(x)\ge n\ \Rightarrow\ x\in[n;+\infty[$

$\Leftarrow)$ Montrons que : $x\in[n;+\infty[\ \Rightarrow\ E(x)\ge n$

Supposons que : $x\in[n;+\infty[$ donc : $x\ge n$

Et comme : $E(x)$ est le plus grand entier relatif intérieur ou égale à x et n est un entier relatif intérieur ou égale à x alors : $E(x)\ge n$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\ge n \Leftrightarrow x\in[n;+\infty[$

b) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{Z}:\ E(x)\succ n \Leftrightarrow x\in[n+1;+\infty[$

$E(x)\succ n \Leftrightarrow\ E(x)\ge n+1 \Leftrightarrow x\in[n+1;+\infty[$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :

a) $E(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 0+1\right[\; \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 1\right[$

D'où : $S = \left]-\infty; 1\right[$

b) $E(x) < 0 \; \Leftrightarrow \; E(x) \leq -1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -1+1\right[\; \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 0\right[$

D'où : $S = \left]-\infty; 0\right[$

c) $2E(x) - 5 \leq 0 \Leftrightarrow E(x) \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow E(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 2+1\right[\; \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 3\right[$

D'où : $S = \left]-\infty; 3\right[$

d) $E(x) \geq 7 \quad \Leftrightarrow x \in \left[7; +\infty\right[$ D'où : $S = \left[7; +\infty\right[$

e) $E(x) > 3 \; \Leftrightarrow \; E(x) \geq 4 \Leftrightarrow x \in \left[4; +\infty\right[$ D'où : $S = \left[4; +\infty\right[$

f) $2E(x) - 9 > 0 \quad \Leftrightarrow E(x) > \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \; E(x) \geq 5 \Leftrightarrow x \in \left[5; +\infty\right[$

D'où : $S = \left[5; +\infty\right[$

g) $-1 \leq E(3x) \leq 1 \; \Leftrightarrow \; \begin{cases} -1 \leq E(3x) \\ E(3x) \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \; \begin{cases} 3x \geq -1 \\ 3x < 1+1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \; \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right[$

D'où : $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right[$

Exercice 19 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}$

1) Déterminer : D_f

2) a) Montrer que : $f(x) = 1$ si $x \in \left]0; 1\right[$

b) Montrer que : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ si $x \in \left]-1; 0\right[$

c) Montrer que : $0 < f(x) \leq \frac{1}{x+1}$; $\forall x \in \left]1; +\infty\right[$

d) Encadrer $f(x)$; si $x \in \left]-\infty; -1\right[$

Solution : $f(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}$

1) $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x + E(x) \neq 0 \right\}$

On a : $x + E(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) = -x$

Puisque $E(x) \in \mathbb{Z}$ alors : $-x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$E(x) = -x \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2) a) Montrons que : $f(x) = 1$ si $x \in]0;1[$

Soit $x \in]0;1[$ donc : $E(x) = 0$ et donc : $f(x) = \frac{x-0}{x+0} = 1$

b) Montrons que : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ si $x \in]-1;0[$

Soit $x \in]-1;0[$ donc : $E(x) = -1$ et donc : $f(x) = \frac{x-(-1)}{x+(-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

c) Montrons que : $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x+1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$ donc : $x \succ 1 \Rightarrow E(x) \geq 1$ (la partie entière est une fonction croissante)

Donc : $E(x) + x \geq x + 1$ c'est-à-dire : $E(x) + x \geq x + 1 \; 0 \prec \frac{1}{E(x)+x} \leq \frac{1}{x+1}$ ①

On a aussi : $E(x) \leq x \prec E(x) + 1$ donc : $0 \leq x - E(x) \prec 1$ ②

① et ② $\Rightarrow 0 \leq \frac{x-E(x)}{x+E(x)} \prec \frac{1}{x+1}$ c'est-à-dire : $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x+1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

d) Encadrement de $f(x)$; si $x \in]-\infty;-1[$

Soit $x \in]-\infty;-1[$

On a : $E(x) \leq x \prec E(x) + 1$ donc : $x - 1 \prec E(x) \leq x$

Donc : $2x - 1 \prec E(x) + x \leq 2x$

Donc : $-2x \leq -(E(x)+x) \prec -2x+1$ et $-x \leq -E(x) \prec 1-x$

Et par suite : $0 \leq \frac{x-E(x)}{-(x+E(x))} \leq \frac{1}{-2x}$ c'est-à-dire : $0 \leq -f(x) \leq -\frac{1}{2x}$

Donc : $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq 0$

Exercice 20 : Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$

Exercice 21 : Déterminer les applications : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $f(E(x)y) = f(x)E(f(y))$©

Solution : Soit f telle que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $f(E(x)y) = f(x)E(f(y))$©

▷ Supposons que f soit à valeurs dans $[0;1[$ Alors : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $f(E(x)y) = 0$

En particulier pour $x = 1$ et donc est l'application nulle.

▷ Supposons maintenant $\exists y_0 \in \mathbb{R}$ et fixons un tel y_0. Comme : $E(f(y_0)) \neq 0$: $f(x) = \frac{f(E(x)y)}{E(f(y_0))}$

Ce qui montre que la restriction de à chaque intervalle du type : $[n;n+1[$ (avec $n\in\mathbb{Z}$ est constante.

Notons K_n cette constante. En choisissant $y=0$ et $x=n$ dans ©: $K_0=K_nE(K_0)$ ®

En particulier $n=0: K_0=K_0E(K_0)$ Donc : $K_0\in\{0\}\cup[1;2[$

- Si $K_0\in[1;2[$ alors ® donne $K_0=K_n$ donc est constante et cette constante appartient à $[1;2[$
- Et si $K_0=0$ alors en prenant $y=\frac{1}{2}$ et $x=2$ il vient : $K_1=K_2E(K_0)=0$ puis en prenant $y=1$ et $x=n$ il vient $K_n=K_nE(K_1)=0$ Dans ce cas, $f=0$

Réciproquement, les fonctions constantes : $x\mapsto K_0\in\{0\}\cup[1;2[$ Conviennent toutes. Ce sont les solutions cherchées.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF. ATMAN