1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°7 : Généralités sur les fonctions

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{x^2}{4x^2+2(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}}$ 2) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{6|x+5|+2}$ 3) $f(x)=\sqrt{\frac{-x-5}{x+2}}$

4) $f(x)=\frac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10|-|6+3x|}$ 5) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$ 6) $f(x)=(x-2)\sqrt{x^4-7x^2+12}$

Exercice 2 : Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2x-5$

Et $g(x)=-x-3$

Étudier les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

Exercice 3 : À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

1) a) $f(1{,}9).....f(3{,}8)$ b) $f(-4{,}2).....f(-2{,}7)$ c) $f(-1{,}8).....f(-1{,}4)$

2) Peut-on comparer l'image des nombres $-1{,}7$ *et* $1{,}5$? Justifier.

3) Peut-on comparer l'image des nombres $-0{,}6$ *et* $-4{,}8$? Justifier.

x	-5	-3	-2	-1	0	1	3	5
$f(x)$	-3	0	4	4	1	2	0	-5

Exercice 4 : Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$

Montrer que : g est Bornée.

Exercice 5 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que 1 est le minimum absolu de f sur D_f

3) Montrer que $\frac{7}{3}$ est le maximum absolu de f sur D_f

4) Que peut-on déduire ?

Exercice 6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

2) Démontrer que f n'est pas majorée

Exercice 7 : Vérifier que f est périodique et T est une période de f dans chacune des cas suivants et donner un domaine d'étude de f : D_E

1) $f(x)=2\sin x-5\cos 2x$: $T=2\pi$

2) $f(x)=\sin 2x-7\cos 4x$: $T=\pi$

3) $f(x)=6\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}$: $T=\pi$

4) $f(x)=6\sin 6x-\frac{1}{3}\tan 3x$: $T=\frac{\pi}{3}$

Exercice 8 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$ et paire

Tel que : $f(x)=x \quad \forall x\in[0,1]$

1) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{7}{2}\right)$; $f(2027)$; $f\left(-\frac{2006}{3}\right)$

2)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $I=[-5;5]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 9 : Etudier les variations des fonctions définies par : 1) $f(x)=-2x-100$ 2) $g(x)=\frac{-4}{x}$

3) $h(x)=-2x^3+2027$ 4) $k(x)=2001\sqrt{x-2}+2024$

Exercice 10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1)Déterminer D_f

2) a) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)+1$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$

c) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$

3)a) Déterminer α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

c) Dresser le Tableau de variations de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\geq -1$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ On a : $5\leq f(x)\leq\frac{9}{16}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $-1\leq f(x)\leq\frac{5}{4}$

5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

9)Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2+4x=4m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Exercice 11 : Soit f une fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les nombres réels : a et b tel que : $f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$; $\forall x\in D_f$

3) En déduire que f est minorée par 1

4) Soit : $m\in\mathbb{R}$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=m$ d'inconnue x et m paramètre réel

b) En déduire : $f(\mathbb{R}-\{-1\})$

5) a) Soient : $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ deux réels tel que : $x_1\neq x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2)=\frac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)^2\times(x_2+1)^2}$

b) En déduire les variations de f sur D_f

6) Soit g une fonction définie par : $g(x)=f(|x|)$

a) Etudier la parité de g

b) Dresser le tableau de variations de g

Exercice 12 : Soit les fonctions f et g définies par : $g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ et $f(x)=\frac{1}{x}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h

2) Déterminer : $h(x)$ si $x\in D_h$

Exercice 13 : Soit les fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1$ et $h(x)=2x^2+3x-1$

Déterminer la fonction g telle que : $h=g\circ f$

Exercice 14 : Soient U et V deux fonctions définies par :

$U(x)=x^2+2x+3$ et $V(x)=x^2-4x+2$

1) Donner le tableau de variation de U et V

2) Soit f la fonction numérique tel que : $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+11$

a) Vérifier que : $f(x)=(U\circ V)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

b) Étudier la monotonie de f dans les intervalles suivants : $]-\infty;1]$; $[1;2]$; $[2;3]$ et $[3;+\infty[$

c) Déterminer les extrémums de la fonction f

Exercice 15 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+2}$ et $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

A) 1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : $A(-1;1)$ et $B(2;2)$ sont des points d'intersections de (C_f) et (C_g)

3) Déterminer les tableaux de variations de f et g

4) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations : $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}\prec 0$ et $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$

B)1) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$

a) Déterminer D_h b) Montrer que : $h=f\circ g$

2) a) Déterminer graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)$

b) Étudier les variations de h et donner son tableau de variation.

c) Déterminer la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

3) Montrer que : $h(x)\succ\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

Exercice 16 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x-4E\left(\frac{x}{4}\right)}$

1) Calculer : $f(1)$; $f(4)$: $f(-5)$

2) Déterminer D_f

3) Montrer que : 4 est une période pour la fonction f

4) Montrer que f est bornée

5) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I=[0;4[$

6) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;8]\cap D_f=[-4;8]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 17 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $E(x)=-1$ 2) $E(2x-1)=3$ 3) $E(3x-5)=-1{,}5$ 4) $3E\left(\frac{x}{2}\right)+6=0$

5) $2E(x)-5=0$ 6) $E\left(\frac{2x-3}{3}\right)=\frac{x-1}{3}$ 7) $E\left(\frac{x^2-3x+1}{3}\right)=\frac{x-1}{3}$ 8) $E\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=2$

9) $E(2x-1)=E(x-4)$ 10) $E(3x)+2E(x)=15$

Exercice 18 : 1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\leq n\Leftrightarrow x\in]-\infty;n+1[$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\prec n\Leftrightarrow x\in]-\infty;n[$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\geq n\Leftrightarrow x\in[n;+\infty[$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}$: $E(x)\succ n\Leftrightarrow x\in[n+1;+\infty[$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $E(x)\leq 0$ b) $E(x)\prec 0$ c) $2E(x)-5\leq 0$ d) $E(x)\geq 7$ e) $E(x)\succ 3$ f) $2E(x)-9\succ 0$

g) $-1\leq E(3x)\leq 1$

Exercice 19 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x-E(x)}{x+E(x)}$

1) Déterminer : D_f

2) a) Montrer que : $f(x)=1$ si $x\in]0;1[$

b) Montrer que : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ si $x\in]-1;0[$

c) Montrer que : $0\prec f(x)\leq\frac{1}{x+1}$; $\forall x\in]1;+\infty[$

d) Encadrer $f(x)$; si $x\in]-\infty;-1[$

Exercice 20 : Montrer que ; $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$

Exercice 21 : Déterminer les applications : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$; $f(E(x)y)=f(x)E(f(y))$©

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien