1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°8 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$ 2) $f(x)=\dfrac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\dfrac{1}{x+1}$

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+8}{x+1}}$ 5) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$ 6) $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x|+x}$

7) $f(x)=2\sin x-3\cos x-1$ 8) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+6x+5\neq 0\ \ et\ \ x-1\geq 0\ \}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+6x+5\neq 0\ \ et\ \ x\geq 1\}$

$3x^2+6x+5=0$: $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ (Pas de solutions)

Donc : $3x^2+6x+5\neq 0$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\ x\geq 1\}$

Donc : $D_f=[1;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^4-2x^2+1\neq 0\ \ \}$

$x^4-2x^2+1=0$ Equivalent à : $(x^2)^2-2x^2+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2-2X+1=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

La solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X=\dfrac{-(-2)}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$

Donc on a : $x^2=1$

Donc : $x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

3) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\dfrac{1}{x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+6x+5\geq 0\ \ et\ \ x+1\neq 0\ \}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+6x+5\geq 0\ \ et\ \ x\neq -1\ \}$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

x	$-\infty \qquad +\infty$
$3x^2+6x+5$	$+$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \right\}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1; +\infty\right[$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+8}{x+1}}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x+1 \neq 0 \;\; et \;\; \frac{2x+8}{x+1} \geq 0 \right\}$$

$x+1=0$ Équivalent à : $x=-1$ et $2x+8=0$ Équivalent à : $x=-4$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-4		-1	$+\infty$
$2x+8$	$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x+8}{x+1}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

5) $f(x) = \dfrac{x}{|2x-4| - |x-1|}$. $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, |2x-4| - |x-1| \neq 0 \right\}$

$$|2x-4| - |x-1| = 0 \;\Leftrightarrow\; |2x-4| = |x-1| \Leftrightarrow 2x-4 = x-1 \text{ ou } 2x-4 = -(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x - x = 4-1 \text{ ou } 2x-4 = -x+1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } 2x+x = 4+1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } 3x = 5 \;\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{5}{3}$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$

6) $f(x) = \dfrac{2x-1}{|x| + x}$ $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x| + x \neq 0 \right\}$ donc : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x| \neq -x \right\}$

Si $x \in \mathbb{R}^{*+}$ alors $|x| = x \neq -x$ donc : $\mathbb{R}^{*+} \subset D_f$

Si $x \in \mathbb{R}^{*+}$ alors $|x| = -x$ donc : $x \notin D_f$

Par suite : $D_f = \mathbb{R}^{*+}$

7) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x - 1$

$D_f = \mathbb{R}$ Car tous les réels ont des images par f

8) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{2\cos x - 1}$: $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2\cos x - 1 \neq 0 \right\}$

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 2 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\cos x - x^2}{x+1} & si \quad x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-4} & si \quad x > 0 \end{cases}$

Déterminer D_f

Solution : *Remarque :* $\begin{cases} f(x) = f_1(x) & si \quad x \in I_1 \\ f(x) = f_2(x) & si \quad x \in I_2 \end{cases}$ Alors : $D_f = \left(D_{f_1} \cap I_1\right) \cup \left(D_{f_2} \cap I_2\right)$

On pose : $f_1(x) = \dfrac{2\cos x - x^2}{x+1}$ et $I_1 = \left]-\infty; 0\right]$ et $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-4}$ et $I_2 = \left]0; +\infty\right[$

$D_{f_1} = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; +\infty\right[$ et $D_{f_2} = \left]-\infty; -2\right[\cup \left]-2; 2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$

$D_{f_1} \cap I_1 = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 0\right]$ et $D_{f_2} \cap I_2 = \left]0; 2\right[\cup \left]2; +\infty\right]$

Donc : $D_f = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 0\right] \cup \left]0; 2\right[\cup \left]2; +\infty\right]$

Donc : $D_f = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 2\right[\cup \left]2; +\infty\right[= \mathbb{R} - \{-1; 2\}$

Exercice 3 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(4x-1) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \ge 1 \\ 2x-5 & si \quad x < 1 \end{cases}$

1) Déterminer $f(x)$ en fonction de x

2) Calculer : $f(4)$

Solution : 1) On a : $x = 4\left(\dfrac{x+1}{4}\right) - 1$ donc : $f(x) = f\left(4\left(\dfrac{x+1}{4}\right) - 1\right)$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{4} - 1 & si \quad \dfrac{x+1}{4} \ge 1 \\ 2\dfrac{x+1}{4} - 5 & si \quad \dfrac{x+1}{4} < 1 \end{cases}$ C'est-à-dire : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{4} & si \quad x \ge 3 \\ \dfrac{x-9}{2} & si \quad x < 3 \end{cases}$

2) Calcul de : $f(4)$: $f(4) = \dfrac{4-3}{4} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 4 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ 2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$ 3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

Solution : 1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$; on a $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \ne 0$ donc : $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\dfrac{x^2-1}{x}$

$f(-x) = -f(x)$

Donc : f est une fonction impaire,

2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 1 \ne 0$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$, alors $-x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

- $f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$

$f(-x) = f(x)$

Donc : f est une fonction paire

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ Donc $D_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais : $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exercice 5 : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) + 10g(-x) = \frac{2x^3}{x^2+1} - \sin x$: $\forall x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que : g est une fonction impaire

2) Donner une : expression de $g(x)$: pour tout réel x

Solution : On a : $g(x) + 10g(-x) = \frac{2x^3}{x^2+1} - \sin x$ (1) : $\forall x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: En remplaçant x par –x on trouve : $g(-x) + 10g(x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2+1} - \sin(-x)$

Donc : $g(-x) + 10g(x) = -\frac{2x^3}{x^2+1} + \sin x$ (2)

(1) + (2) donne : $11(g(-x) + g(x)) = 0$ donc : $g(-x) + g(x) = 0$

Donc : $g(-x) = -g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc : g est une fonction impaire

2) On a : $g(x) + 10g(-x) = \frac{2x^3}{x^2+1} - \sin x$

Et puisque f est une fonction impaire donc : $g(x) - 10g(x) = \frac{2x^3}{x^2+1} - \sin x$

$-9g(x) = \frac{2x^3}{x^2+1} - \sin x \Leftrightarrow \boxed{g(x) = -\frac{2}{9}\frac{x^3}{x^2+1} + \frac{1}{9}\sin x}$

Exercice 6 : Soient les deux fonctions : $f(x) = \frac{\sqrt{8x^4 + 8x^2 + 2}}{\sqrt{4x^2}}$ et $g(x) = \frac{1+2x^2}{\sqrt{2}|x|}$

Comparer les fonctions f et g

Solution :

- On a : $x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^*$

- On a : $x \in D_g \Leftrightarrow |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^*$

Alors : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

PROF: ATMANI NAJIB

- Soit : $x \in \mathbb{R}^*$

On sait que $\sqrt{4x^2} = 2\sqrt{x^2} = 2|x|$ et

$$8x^4 + 8x^2 + 2 = 2\left(4\left(x^2\right)^2 + 4x^2 + 1\right) = 2\left(\left(2x^2\right)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2\right) = 2\left(2x^2+1\right)^2$$

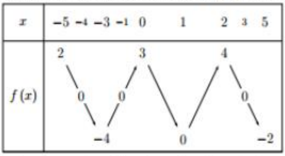
Donc : $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x^4+8x^2+2}}{\sqrt{4x^2}} = \dfrac{\sqrt{2\left(2x^2+1\right)^2}}{2|x|} = \dfrac{\sqrt{2}\left|2x^2+1\right|}{2|x|} = \dfrac{\left|2x^2+1\right|}{\sqrt{2}|x|} = g(x)$

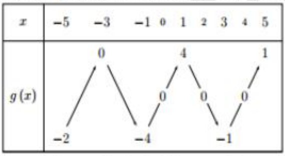
Donc : $f(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Finalement / on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

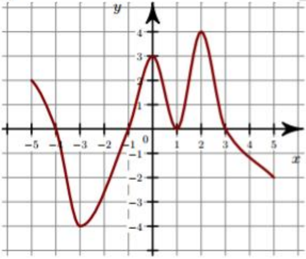
Donc : $f = g$

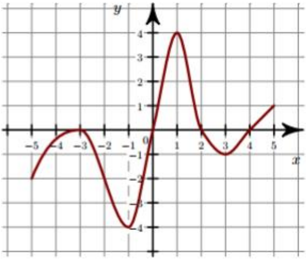
Exercice 7 : 1) Pour chaque question, répondre avec une phrase en précisant les intervalles.
a) Quel est le signe de la fonction f ? b) Quels sont les extremums de la fonction g ?
2) Tracer une représentation graphique de f et g sur leurs ensembles de définition.


x
−5
−4
−3
−1
0
1
2
3
5
f (x)
2
0
−4
0
3
0
4
0
−2


x
−5
−3
−1
0
1
2
3
4
5
g (x)
−2
0
−4
0
4
0
−1
0
1

Solution : 1) a) La fonction f est négative sur [−4 ; −1] et positive sur [−5 ; −4], [−1 ; 3].
b) • Sur [−5 ; 5] , le maximum de g est y = 4. Il est atteint en x = 1.
• Sur [−5 ; 5] , le minimum de g est y = −4. Il est atteint en x = −1.
2)





Exercice 8 : Soit f la fonction numérique tel que : $f(x) = |2x-4|$

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

2)Tracer la représentation graphique de la fonction f

Solution : 1) On a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc : $D_f = \mathbb{R}$

$2x-4=0$ Équivaut à : $x = \dfrac{4}{2} = 2$

Donc : $f(x) = 2x-4$ si $x \in [2,+\infty[$ et $f(x) = -2x+4$ si $x \in]-\infty,2]$

x		2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$
$\lvert 2x-4\rvert$	$-2x+4$		$2x-4$

Donc : $\begin{cases} f(x)=-2x+4 & si\ \ x\in\left]-\infty,2\right] \\ f(x)=2x-4 & si\ \ x\in\left[2;+\infty\right[\end{cases}$

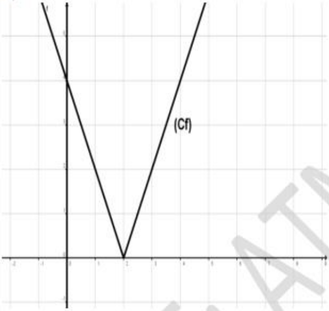
→Si $x\in\left]-\infty,2\right]$: $f(x)=-2x+4$ et $-2<0$ donc : f est strictement décroissante dans $\left]-\infty,2\right]$

→Si $x\in\left[2;+\infty\right[$: $f(x)=2x-4$ et $2>0$ donc : f est strictement croissante dans $\left[2;+\infty\right[$

Le Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

2)



Exercice 9 : 1) Donner une période des fonctions suivantes :

a) $f:x\rightarrow \sin(4x-1)$ b) $g:x\rightarrow \cos(5x)$

2) Trouver une fonction de période $T=\frac{3}{4}$

Solution :1) a) $T=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 1) b) $T=\frac{2\pi}{5}$

2) Une fonction est. $h:x\rightarrow \cos(\frac{8\pi}{3}x)$

Exercice 10 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

Tel que : $f(x)=1-x^2\quad \forall x\in[-1;1]$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(0,1)$; $f(-2.5)$; $f(2026,5)$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : 1) Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $\left[-3;3\right]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur un intervalle de longueur $T=2$ par exemple : $I_0=\left[-1;1\right]$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Mais comme : f une fonction paire on choisi un intervalle d'étude symétrique par rapport à zéro

En effet : →Si $x\in\left[-1;1\right]$ alors $-x\in\left[-1;1\right]$

$\rightarrow f(-x)=1-(-x)^2=1-x^2=f(x)$

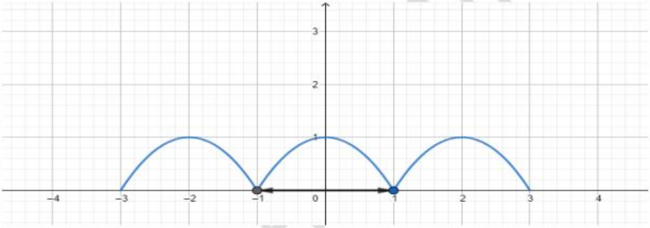
Par conséquent on peut réduire intervalle d'étude : $I_0'=\left[0;1\right]$

On a : $f(x)=-x^2+0x+1$: $a=-1$ et $b=0$ et $c=1$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{0}{2\times(-1)}=0$ Et $\beta=f(\alpha)=f(0)=-0^2+1=1$

Tableau de variation :

x	-1		0		$+1$
$f(x)$		↗	1	↘	



2) Calculons : $f(0,1)$; $f(-2.5)$; $f(2026,5)$

Puisque : $0,1\in\left[-1;1\right]$ Alors : $f(0,1)=1-(0,1)^2=\dfrac{99}{100}=0,99$

$\rightarrow f(-2.5)=f(-2-0,5)=f\left(2\times(-1)+(-0,5)\right)=f(-0,5)$ car f est périodique de période $T=2$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(-2.5)=f(-0,5)$ et puisque : $-0,5\in\left[-1;1\right]$

Alors : $f(-2.5)=f(-0,5)=1-(-0,5)^2=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

$\rightarrow f(2026,5)=f(2026+0,5)=f(1013\times2+0,5)=f(0,5)$ car f est périodique de période $T=2$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(2026,5)=f(0,5)$ et puisque : $0,5\in\left[-1;1\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $f(2026,5)=f(0,5)=f(-0,5)=\frac{3}{4}$

Exercice 11 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2-4x+7$

1) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)>0$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ On a : $5\le f(x)\le\frac{11}{2}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-1;0]$ On a : $7\le f(x)\le 13$

3)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

4)Tracer la courbe représentative de (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : 1) On a : $f(x)=2x^2-4x+7$: f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=2$; $b=-4$ et $c=7$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times2}=1$ et $f(\alpha)=f(1)=2\times1^2-4\times1+7=2-4+7=5$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(1;5)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

Comme : $\boxed{a=2>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$

Tableau de variations de f : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	5	$\nearrow$

2) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(1)=5$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(1)\le f(x)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $5\le f(x)$ or $0<5$

Par suite : $0<f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ alors : $1\le x\le\frac{3}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[1;\frac{3}{2}\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $f(1)\leq f(x)\leq f\left(\frac{3}{2}\right)$ et comme : $f(1)=5$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{3}{2}\right)+7=\frac{11}{2}$

Par suite : $5\leq f(x)\leq\frac{11}{2}$ si $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$

b) Soit : $x\in[-1;0]$ On a alors : $-1\leq x\leq 0$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-1;0]$

Alors : $f(0)\leq f(x)\leq f(-1)$ et comme :

$f(0)=2(0)^2-4\times(0)+7=7$ Et $f(-1)=2(-1)^2-4\times(-1)+7=13$

Par suite : $7\leq f(x)\leq 13$

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $2x^2-4x+7=0$ $a=2$ et $b=-4$ et $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times3=16-24=-8<0$

Donc : Pas de solution

Donc : la courbe (C_f) ne coupe pas l'axe des abscisses

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

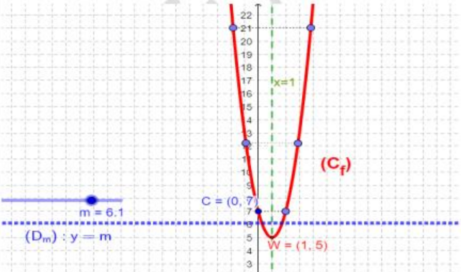
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=2(0)^2-4\times(0)+7=7$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;7)$

4) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	4	1	0	1	4	9



ATMANI NAJIB

5) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m<5$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=5$ il y'a une solution c'est : x = 1

Si : $m>5$ il y'a deux solutions

Exercice 12 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{7}{3}$ .Conclure

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+3x+3\neq 0\}$

$\Delta=-3\prec 0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-1=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\dfrac{2x^2+7x+7-1(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$

$f(x)-1=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ Or $x^2+3x+3\succ 0$ car $\Delta=-3\prec 0$(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2\geq 0$ donc $f(x)\geq 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=1$

2) Soit $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)-\dfrac{7}{3}=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\dfrac{7}{3}=\dfrac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}\leq 0$

Par suite f est majorée par $\frac{7}{3}$.

Conclusion : $1\prec f(x)\leq\frac{7}{3}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$

Montrer que : g est Bornée.

Solution : On a $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\leq\sin x\leq 1$ donc $-4\leq 4\sin x\leq 4$

Donc $-4-3\leq 4\sin x-3\leq 4-3$

donc $-7\leq g(x)\leq 1$

Donc : g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Déterminer D_f

2) Montrer que -1 est le minimum de f sur D_f.

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x^2+1\neq 0\right\}$

$x^2+1=0$: $\Delta<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

---

2) il s'agit de montrer que : $-1\leq f(x)$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-(-1)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}+1=\frac{x^2+4x+1+x^2+1}{x^2+1}=\frac{2x^2+4x+2}{x^2+1}=\frac{2(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$

car $x^2+1>0$ et on a aussi : $(x+1)^2\geq 0$

Donc ; $f(x)+1\geq 0$ par suite : $-1\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=-1\Leftrightarrow\frac{2(x+1)^2}{x^2+1}=0\Leftrightarrow 2(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$$

Donc : $f(-1)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Conclusion : -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-4x^2+4x+5$

Montrer que f admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera

Solution : 1) a) On a $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=-4x^2+4x+5=-4\left(x^2-x\right)+5=-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)+5=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1+5=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+6$$

Donc : $f(x)-6=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$

Donc : $f(x)\leq 6$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=6\Leftrightarrow f(x)-6=0\Leftrightarrow -4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Donc : $f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : 6 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 16 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{1-2x}{x^2}$:

1) Montrer que : f est minorée par -1

2) Soient : $x_1\in\mathbb{R}^*$ et $x_2\in\mathbb{R}^*$ tel que : $x_1\neq x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2)=\frac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2\times x_2^2}$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles : $I=]0,1]$ et $J=[1;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+^*$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : 1) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a : $-1 \leq f(x)$

Soit : $x \in \mathbb{R}^*$: On a : $f(x)-(-1)=\frac{1-2x}{x^2}+1=\frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a : $-1 \leq f(x)$

Donc : f est minorée par -1

2) Soient : $x_1 \in \mathbb{R}^*$ et $x_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\frac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2 \times x_2^2}$

Soient : $x_1 \in \mathbb{R}^*$ et $x_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2x_1}{x_1^2}-\frac{1-2x_2}{x_2^2}=\frac{x_2^2(1-2x_1)-x_1^2(1-2x_2)}{x_1^2x_2^2}=\frac{x_2^2-2x_1x_2^2-x_1^2+2x_1^2x_2}{x_1^2x_2^2}$$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2x_1x_2(x_1-x_2)}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1-x_2)[-x_1+x_1x_2+x_1x_2-x_2]}{x_1^2x_2^2}$$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_1-x_2)[x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)]}{x_1^2 \times x_2^2}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2 \times x_2^2}$

3) →) Déduisons les variations de f sur l'intervalle : $I=]0,1]$

Soient : $x_1 \in]0,1]$ et $x_2 \in]0,1]$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Alors : $0 < x_1 \leq 1$ et $0 < x_2 < 1$ donc : $-1 < x_1 - 1 \leq 0$ et $-1 < x_2 - 1 < 0$

Alors : $x_1(x_2-1) < 0$ et $x_2(x_1-1) \leq 0$ et $x_1^2 \times x_2^2 > 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2 \times x_2^2} < 0$

D'où : f est décroissante sur $I=]0,1]$

→) Déduisons les variations de f sur l'intervalle : $J=[1;+\infty[$

Soient : $x_1 \in [1;+\infty[$ et $x_2 \in [1;+\infty[$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Alors : $x_1 \geq 1$ et $x_2 > 1$ donc : $x_1 - 1 \geq 0$ et $x_2 - 1 > 0$

Alors : $x_1(x_2-1) \geq 0$ et $x_2(x_1-1) \geq 0$ et $x_1^2 \times x_2^2 > 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2 \times x_2^2} \geq 0$

D'où : f est croissante sur : $J=[1;+\infty[$

D'où : son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

PROF: ATMANI NAJIB

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

Exercice17 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)a) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de f

b) Tracer la courbe (C_f)

2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)>0$

3) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

a) Montrer que la courbe (C_g) c'est une parabole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de g

b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}>0$

(μ La solution de l'équation : $g(x)=f(x)$ n'est pas demandé de la déterminer)

Solution : 1) a) $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$

On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq0$ c'est-à-dire : $x\neq1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

En générale si : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre :

$W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=1$ et $y=1$

Tableau de variations de f :

$f(x)=\frac{x-2}{x-1}$ on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\succ0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]1\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 1[$

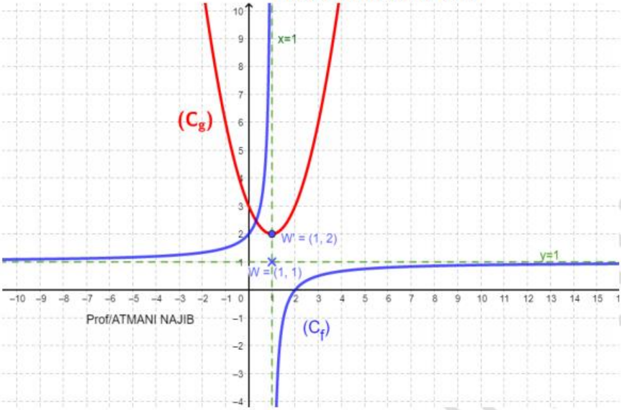
PROF: ATMANI NAJIB

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

-2	-1	0	1	2	3	4
4/3	3/2	2	▨	0	1/2	2/3

b)La courbe $\left(C_f\right)$: $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$



2) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)>0$

$f(x)>0$ Equivaut à : x appartient à l'intervalle ou $\left(C_f\right)$ est au-dessus de l'axe des abscisses

Donc : $S=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

3) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

On a g est une fonction polynôme donc : $D_g=\mathbb{R}$

$\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=3$

Donc $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times 1}=1$ et $g(\alpha)=g(1)=(1)^2-2\times(1)+3=2$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$: $W'(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=1$

Tableau de variations de g : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

c) Résolution graphique de l'inéquation : $\dfrac{g(x)}{f(x)}>1$

PROF: ATMANI NAJIB

$\frac{g(x)}{f(x)} > 1$ Equivaut à : Equivaut à : $\frac{g(x)-f(x)}{f(x)} > 0$

Donc : on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		μ		1		2		$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\|$	$+$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$	

Donc : $S =]-\infty;\mu[\cup]2;+\infty[$

Exercice 18 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=x^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

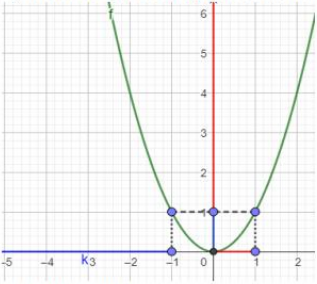
1) Dresser le tableau de variation s de f

2) Déterminer graphiquement : $f([0;1])$; $f(]-\infty;-1])$

Solution : 1) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

2) La courbe de f est une parabole de sommet O et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées



Graphiquement :

$\rightarrow$Si x décrit l'intervalle $[0;1]$ équivaut a $f(x)$ décrit l'intervalle $[0;1]$

Donc : $f([0;1])=[0;1]$

$\rightarrow$Si x décrit l'intervalle $]-\infty;-1]$ équivaut a $f(x)$ décrit l'intervalle $[1;+\infty[$

Donc : $f(]-\infty;-1])=[1;+\infty[$

Remarques : $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$; $y\in f(I)\Leftrightarrow \exists x\in I / y=f(x)$; $f(I)\subset J \Leftrightarrow \forall x\in I ; f(x)\in J$

Exercice 19 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=3x+4$ et $g(x)=\frac{1}{x+1}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Déterminer : $D_{g\circ f}$

2) Déterminer : $(g\circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f et f(x)\in D_g\}$

On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ donc $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} et f(x)\neq -1\}$

$f(x)=-1\Leftrightarrow 3x+4=-1\Leftrightarrow 3x=-5\Leftrightarrow -\frac{5}{3}=x$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

2) On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=\frac{1}{3x+4+1}$

Donc : $(g\circ f)(x)=\frac{1}{3x+5}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

Exercice 20 : Soit f la fonction f définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ tel que : $f(x)=-5x^2+7$

Décomposer la fonction f en fonctions élémentaire et étudier les variations de f

Solution : $v(x)=-5x+7$ et $u(x)=x^2$ La fonction : $f=v\circ u$

La fonction u est croissante sur $[0;+\infty[$ et $u(x)=x^2\in[0;+\infty[$ et v est décroissante sur $[0;+\infty[$

Donc d'après le théorème des fonctions composées, $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

Exercice 21 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=x\sqrt{x}$ et $f(x)=x^2-2x+2$

1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : g est croissante sur D_g

3) En déduire que : $g(x)\in[0;1]\ \forall x\in[0;1]$

4) Donner le tableau de variation de f

5) On considère la fonction h tel que : $h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)\ \ \forall x\succ 0$ b) Étudier la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

Solution : 1) a) $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=[0,+\infty[$ et $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrons que : g est croissante sur $[0,+\infty[$

g Est le produit de deux fonctions croissantes sur $[0,+\infty[$ donc : g est croissante sur $[0,+\infty[$

3) Déduction que : $g(x)\in[0;1]\ \forall x\in[0;1]$

$x\in[0;1]\Rightarrow 0\leq x\leq 1\Rightarrow g(0)\leq g(x)\leq g(1)$ car : : g est croissante sur $[0,+\infty[$

$\Rightarrow 0\leq g(x)\leq 1\Rightarrow g(x)\in[0;1]$

4) Le tableau de variation de f : $f(x)=x^2-2x+2$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=2$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

PROF.ATMANI NAJIB

$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2\times 1} = 1$ Et $\beta = f(\alpha) = f(1) = (1)^2 - 2\times 1 + 2 = 1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

5) $h(x) = x^3 - 2x\sqrt{x} + 2$

a) Vérifions que : $h(x) = (f\circ g)(x)\ \ \forall x \succ 0$ on a : $g(x) = x\sqrt{x}$ et $f(x) = x^2 - 2x + 2$

$h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = (x\sqrt{x})^2 - 2x\sqrt{x} + 2 = x^3 - 2x\sqrt{x} + 2;\ \forall x \succ 0$

b) Étude de la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

a) Sur $[0;1]$: On a $h(x) = (f\circ g)(x)$

Puisque g est croissante sur $[0;1]$ et $g([0;1]) \subset [0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ alors $h = f\circ g$ est décroissante sur $[0;1]$

b) Sur $[1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $g([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$ et f est croissante sur $[1;+\infty[$ alors $h = f\circ g$ est croissante sur $[1;+\infty[$

Exercice 22 : Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = \frac{2}{x+1}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(0;2)$

3) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

5) On pose : $h(x) = \sqrt{\frac{6+4x}{x+1}}$

a) Déterminer D_h b) Étudier les variations de h dans l'intervalle : $\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

Solution : 1) a) $D_f = \{x\in\mathbb{R} / x+4 \geq 0\} = \{x\in\mathbb{R} / x \geq -4\} = [-4,+\infty[$

b) On a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) $A(x;y) \in (C_f)\cap(C_g) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = \left(\frac{2}{x+1}\right)^2$ et $x+1 \succ 0$

$\Leftrightarrow x+4 = \frac{4}{x^2+2x+1}$ et $x+1 \succ 0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2+2x+1) = 4$ et $x+1 \succ 0 \Leftrightarrow x^3+6x^2+9x = 0$ et $x+1 \succ 0$

$\Leftrightarrow x(x^2+6x+9) = 0$ et $x+1 \succ 0 \Leftrightarrow ()\, x = 0\ ou\ x^2+6x+9 = 0$ et $x+1 \succ 0 \Leftrightarrow (x = 0\ ou\ (x+3)^2 = 0\,)$et $x+1 \succ 0$

PROF: ATMANI NAJIB

$\Leftrightarrow (x=0 \; ou \; x+3=0)$ et $x+1\succ 0 \Leftrightarrow (x=0 \; ou \; x=-3)$ et $x+1\succ 0 \Leftrightarrow x=0$

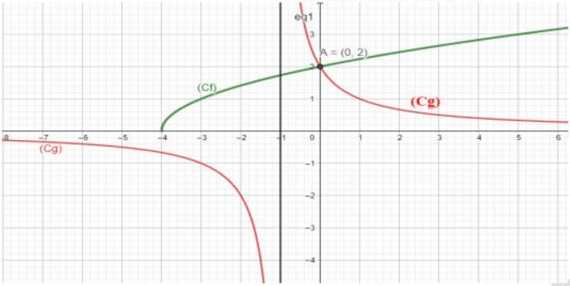
Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\{A(0;2)\}$

3) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) $f(x)=\sqrt{x+4}$:

x	-4	-3	0	5
$f(x)$	0	1	2	3

b) (C_g) est l'hyperbole de centre $W(-1;0)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-1$ et $y=0$



4) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[-4;-1[\cup[0;+\infty[$

Donc : $S=[-4;-1[\cup[0;+\infty[$

5) a) On pose : $h(x)=\sqrt{\frac{6+4x}{x+1}}$ $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{6+4x}{x+1}\geq 0 \; et \, x+1\neq 0\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$4x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x+6}{x+1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$D_h=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left]-1;+\infty\right[$

b) On Remarque que : $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

En effet : $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\sqrt{4+g(x)}=\sqrt{4+\frac{2}{x+1}}=\sqrt{\frac{6+4x}{x+1}}=h(x)$; $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

$g(x)=\frac{2}{x+1}$:

x	$-\infty$ -1 $+\infty$	
$g(x)$	↘	↘

On a : g est strictement décroissante sur: $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et

$g\left(\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\right)=[-4;0[$

x	-4 $\qquad$ $+\infty$
f	0 ↗ $+\infty$

$f(x)=\sqrt{x+4}$: f est strictement croissante sur $g\left(\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\right)=[-4;0[$

Par suite : $h=f\circ g$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Exercice 23 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\left(x-2E\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}\right)-x+2\right)$

1) Calculer : $f(4)$; $f(1)$; $f(-5)$

2) Déterminer D_f

3) Montrer que f est bornée

4) Vérifier que 2 est une période pour la fonction f

5) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;2[$

6) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]\cap D_f$ dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) Calculons : $f(4)$; $f(1)$; $f(-5)$

$f(4)=\left(4-2E\left(\frac{4}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{4}{2}\right)-4+2\right)=\left(4-2E(2)\right)\left(2E(2)-2\right)$ Or : $E(2)=2$

$f(4)=(4-4)(4-2)=0$

$f(1)=\left(1-2E\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{1}{2}\right)-1+2\right)=(1-2\times 0)(2\times 0+1)=1$ car : $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f(-5)=\left(-5-2E\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{-5}{2}\right)+5+2\right)=\left(1-2\times(-3)\right)\left(2\times(-3)+1\right)=-35$ car : $E\left(\frac{-5}{2}\right)=-3$

En effet : $(-3)\leq-\frac{5}{2}\prec(-3)+1$

2) $D_f=\mathbb{R}$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

PROF

ATMANI NAJIB

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{x}{2}\prec E\left(\frac{x}{2}\right)+1$ et par suite : $2E\left(\frac{x}{2}\right)\leq x\prec 2E\left(\frac{x}{2}\right)+2$

On a aussi : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x-1\prec E(x)\leq x$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $\frac{x}{2}-1\prec E\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{x}{2}$ et par suite : $x-2\prec 2E\left(\frac{x}{2}\right)\leq x$

Donc : $\begin{cases}0\leq x-2E\left(\frac{x}{2}\right)\prec 2\\ 0\prec 2E\left(\frac{x}{2}\right)-x+2\leq 2\end{cases}$ et par suite $0\leq\left(x-2E\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}\right)-x+2\right)\prec 4$

C'est à dire : $0\leq f(x)\prec 4$

Donc : f est bornée

4) - $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+2\in\mathbb{R}$

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+2)=\left(x+2-2E\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{x+2}{2}\right)-x-2+2\right)$

$=\left(x+2-2E\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}+1\right)-x\right)=\left(x+2-2E\left(\frac{x}{2}\right)-2\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}\right)+2-x\right)$

$=\left(x-2E\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}\right)+2-x\right)=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 2.

5) Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;2[$:

$x\in[0;2[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 2\Leftrightarrow 0\leq\frac{x}{2}\prec 1$ Donc : $E\left(\frac{x}{2}\right)=0$

Donc : $f(x)=(x-2\times 0)(2\times 0-x+2)=x(-x+2)=-x^2+2x$

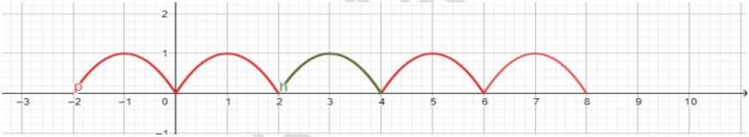
Donc : $f(x)=-x^2+2x$ si $x\in[0;2[$

6) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-2;8]\cap D_f$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[0;2[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$

$f(x)=-x^2+2x$ si $x\in[0;2[$

$S\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ $\frac{-b}{2a}=1$ et $f(1)=1$ $S(1;1)$ le sommet du parabole



Exercice 24 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

3) a) Montrer que : $f(x)=x$ si $x\in\left]\frac{1}{4};1\right]$

b) Montrer que : $\sqrt{x}-x\leq f(x)\leq\sqrt{x}$; $\forall x\in]0;1[$

4) Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

a) Montrer que : $f(x)=(k-1)x$; $\forall x\in\left]\frac{1}{k^2};\frac{1}{(k-1)^2}\right[$

b) Montrer que : $f(x)=kx$; $\forall x\in\left]\frac{1}{(k+1)^2};\frac{1}{k^2}\right[$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\succ 0\}=\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$

2) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x)=0$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$$f(x)=0\Leftrightarrow xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow 0\prec\frac{1}{\sqrt{x}}\prec 1\Leftrightarrow\sqrt{x}\succ 1\Leftrightarrow x\succ 1$$

$f(x)=0\Leftrightarrow x\in]1;+\infty[$

D'où : $S=]0;+\infty[$

3) a) Montrons que : $f(x)=x$ si $x\in\left]\frac{1}{4};1\right]$

Soit $x\in\left]\frac{1}{4};1\right]$ donc : $\frac{1}{4}\prec x\leq 1\Rightarrow\frac{1}{2}\prec\sqrt{x}\leq 1\Rightarrow 1\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\prec 2\Rightarrow E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$

Donc : $f(x)=xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x\times 1=x$

b) Montrons que : $\sqrt{x}-x\leq f(x)\leq\sqrt{x}$; $\forall x\in]0;1[$

Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\prec E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+1$ donc : $\frac{1}{\sqrt{x}}-1\prec E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$

Par suite : $x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\prec xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq x\frac{1}{\sqrt{x}}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x}-x\prec xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\sqrt{x}$

4) Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

a) Montrons que : $f(x)=(k-1)x$; $\forall x\in\left]\frac{1}{k^2};\frac{1}{(k-1)^2}\right[$

Soit $x\in\left]\frac{1}{k^2};\frac{1}{(k-1)^2}\right[$ donc : $\frac{1}{k^2}\prec x\prec\frac{1}{(k-1)^2}\Rightarrow\frac{1}{k}\prec\sqrt{x}\prec\frac{1}{(k-1)}\Rightarrow k-1\prec\frac{1}{\sqrt{x}}\prec k$

Par suite : $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=k-1$ et alors : $f(x)=xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x(k-1)$

b) Montrons que : $f(x)=kx$; $\forall x\in\left]\frac{1}{(k+1)^2};\frac{1}{k^2}\right[$

Soit $x\in\left]\frac{1}{(k+1)^2};\frac{1}{k^2}\right[$ donc : $\frac{1}{(k+1)^2}\prec x\prec\frac{1}{k^2}\Rightarrow\frac{1}{k+1}\prec\sqrt{x}\prec\frac{1}{k}\Rightarrow k\prec\frac{1}{\sqrt{x}}\prec k+1$

Par suite : $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=k$ et alors : $f(x)=xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=kx$

Exercice 25 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $3E(x)+9=0$ 2) $E(x^2-x+2)-x=1$ 3) $E(\sqrt{x})=E\left(\frac{x}{2}\right)$

Solution : Remarque : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall p\in\mathbb{Z}$: $E(x)=p\Leftrightarrow p\leq x\prec p+1$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation

1) $x\in S\Leftrightarrow 3E(x)+9=0\Leftrightarrow E(x)=-3\Leftrightarrow -3\leq x<-3+1\Leftrightarrow -3\leq x<-2\Leftrightarrow x\in[-3;-2[$

D'où : $S=[-3;-2[$

2) (E) : $E(x^2-x+2)-x=1$

Methode1 : Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation

$x\in S\Leftrightarrow E(x^2-x+2)-x=1\Leftrightarrow E(x^2-x+2)=x+1\Leftrightarrow x+1\in\mathbb{Z}$ et $x+1\leq x^2-x+2\prec x+1+1$

On pose : $x+1=k\in\mathbb{Z}$ et donc : $x=k-1$ et $k\in\mathbb{Z}$

$x+1\leq x^2-x+2\prec x+1+1\Leftrightarrow 0\leq x^2-2x+1\prec 1\Leftrightarrow 0\leq(k-1)^2-2(k-1)+1\prec 1$

$\Leftrightarrow 0\leq k^2-2k+1-2k+2+1\prec 1\Leftrightarrow 0\leq k^2-4k+4\prec 1\Leftrightarrow 0\leq(k-2)^2\prec 1\Leftrightarrow(k-2)^2\prec 1\Leftrightarrow\sqrt{(k-2)^2}\prec 1$

$\Leftrightarrow|k-2|\prec 1\Leftrightarrow -1\prec k-2\prec 1\Leftrightarrow 1\prec k\prec 3\Leftrightarrow 1\prec k\prec 3\Leftrightarrow = k=2$

Donc : $k=2$ or $x=k-1$ c'est-à-dire : $x=1$

Donc : $S=\{1\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Methode2 : (presque la même)

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation

$x\in S \Leftrightarrow E\left(x^2-x+2\right)-x=1 \Leftrightarrow E\left(x^2-x+2\right)=x+1$

Donc : $x+1\in\mathbb{Z}$; On pose : $x+1=k\in\mathbb{Z}$ et donc : $x=k-1$ et $k\in\mathbb{Z}$

$x\in S \Leftrightarrow E\left(x^2-x+2\right)=x+1 \Leftrightarrow E\left((k-1)^2-(k-1)+2\right)=k-1+1 \Leftrightarrow E\left(k^2-2k+1-k+1+2\right)=k$

$\Leftrightarrow E\left(k^2-3k+4\right)=k \Leftrightarrow k^2-3k+4=k$ car $k^2-3k+4\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow k^2-4k+4=0 \Leftrightarrow (k-2)^2=0 \Leftrightarrow k-2=0 \Leftrightarrow k=2$

Donc : $k=2$ or $x=k-1$ c'est-à-dire : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

3) $E\left(\sqrt{x}\right)=E\left(\frac{x}{2}\right)$

$D_E=[0;+\infty[$

Methode1 : Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation

$x\in S \Leftrightarrow x\geq 0 \text{ et } E\left(\sqrt{x}\right)=E\left(\frac{x}{2}\right)$

On pose : $E\left(\sqrt{x}\right)=E\left(\frac{x}{2}\right)=k\in\mathbb{Z}$ et donc : $\begin{cases} k\leq\sqrt{x}<k+1 \\ k\leq\frac{x}{2}<k+1 \end{cases}$ et $k\in\mathbb{N}$ car $\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow E\left(\sqrt{x}\right)\geq 0$

$$\begin{cases} 0\leq k\leq\sqrt{x}<k+1 \\ k\leq\frac{x}{2}<k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2\leq x<(k+1)^2 \\ 2k\leq x<2k+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2\leq x<k^2+2k+1 \\ 2k\leq x<2k+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k^2<2k+2 \\ 2k<k^2+2k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2-2k-2<0 \\ 0<k^2+1(vraie) \end{cases} \Rightarrow k^2-2k-2<0$$

Pour : $k^2-2k-2<0$ $\Delta=12>0$ donc : $k_1=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}\simeq 2,7$ et $k_2=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}<0$

x	$-\infty$	$k1$	0	$k2$	$+\infty$
k^2-2k-2	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $k^2-2k-2<0$ et $k\geq 0 \Leftrightarrow k\in[0;2]$

Donc : $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$

On a : $\begin{cases} k^2\leq x<k^2+2k+1 \\ 2k\leq x<2k+2 \end{cases}$

$k=0 \Rightarrow \begin{cases} 0\leq x<1 \\ 0\leq x<2 \end{cases} \Rightarrow x\in[0;1[\Rightarrow S_1=[0;1[$

PROF: ATMANI NAJIB

$k=1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 4 \\ 2 \leq x < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [0;1[\Rightarrow S_2 = [2;4[$

$k=2 \Rightarrow \begin{cases} 4 \leq x < 9 \\ 4 \leq x < 6 \end{cases} \Rightarrow x \in [0;1[\Rightarrow S_3 = [4;6[$

$S \subset S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [0;1[\cup [2;4[\cup [4;6[= [0;1[\cup [2;6[$

Inversement :

Si $x \in [0;1[$ alors : $0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow E(\sqrt{x}) = 0$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow E\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ et donc : $E(\sqrt{x}) = E\left(\frac{x}{2}\right)$

Si $x \in [2;4[$ alors : $2 \leq x < 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow E(\sqrt{x}) = 1$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow E\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ et donc : $E(\sqrt{x}) = E\left(\frac{x}{2}\right)$

Si $x \in [4;6[$ alors : $4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < \sqrt{6} \Rightarrow E(\sqrt{x}) = 2$

$\Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow E\left(\frac{x}{2}\right) = 2$ et donc : $E(\sqrt{x}) = E\left(\frac{x}{2}\right)$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [0;1[\cup [2;4[\cup [4;6[= [0;1[\cup [2;6[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF:ATMANI N